TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Esa Ahlqvist

Opintomoniste lukion integraalilaskennan kurssille MAA10

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Helmikuu 2015

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
AHLQVIST, ESA: Opintomoniste lukion integraalilaskennan kurssille MAA10
Pro gradu -tutkielma, 84 s.
Matematiikka
Helmikuu 2015

Tiivistelmä

Tämän pro gradu -tutkielman tavoitteena oli tehdä opetusmateriaali lukion pitkän matematiikan integraalilaskennan kurssille MAA10. Materiaali on luotu siten, että se noudattaa Lukion opetussuunnitelmien perusteissa mainittuja tavoitteita ja reunaehtoja. Tämän vuoksi se soveltuu hyvin kyseisen kurssin opetusmateriaaliksi ja monien esimerkkiensä johdosta myös itseopiskelumateriaaliksi. Materiaali on pyritty tekemään siten, että se sisältää paljon esimerkkejä, jotka tukevat opiskelijan oppimista. Se sisältää myös runsaasti haastetta edistyneempiä opiskelijoita ajatellen, sillä opetusmateriaalista löytyy myös kurssialueen ylittäviä osioita ja sovellusesimerkkejä, joiden tarkoitus on avartaa käsitystä integraalilaskennasta ja sen mahdollisuuksista. Lisäksi materiaalin alkuosasta löytyy ajankäyttöehdotus kurssin suoritusta varten ja lukujen lopusta harjoitustehtäviä ratkaisuineen.

Materiaali tutustuttaa lukijansa ensin integraalifunktion käsitteeseen ja alkeisfunktioiden sekä muiden funktioiden integrointiin. Siinä käydään myös läpi tekniikoita, joiden avulla integroitavaa lauseketta voidaan muuntaa helpommin integroitavaan muotoon. Näitä ovat muun muassa osamurtoihin jako ja osittaisintegrointi. Tämän jälkeen materiaalissa tutustutaan määrätyn integraalin käsitteeseen ylä- ja alasummien avulla, joka puolestaan johdattaa lukijan tutustumaan, kuinka integraalilaskennan avulla määritetään pinta-aloja ja tilavuuksia. Lopuksi raotetaan hieman ovea tulevaisuutta ajatellen ja käydään läpi muutamia sovellusesimerkkejä siitä, kuinka integraalilaskentaa voidaan hyödyntää eri aloilla.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän pro gradu -tutkielman tarkoitus on toimia opetusmateriaalina lukion pitkän matematiikan integraalilaskennan kurssilla MAA10. Materiaalin luettujaan lukija ymmärtää integraalifunktion sekä määrätyn integraalin käsitteet ja sen, kuinka ne liittyvät toisiinsa. Tämän lisäksi lukija osaa määrittää integraalifunktioita ja osaa soveltaa integroimistekniikoita erilaisissa tehtävissä. Lukija tietää myös, kuinka määrätyn integraalin avulla pystytään määrittämään pinta-aloja ja tilavuuksia. Lisäksi hän ymmärtää, kuinka integraalilaskentaa pystytään soveltamaan ja hyödyntämään eri aloilla.

Tutkielman jakautuu siis kolmeen eri osa-alueeseen: määräämätön integraali (luku 5), määrätty integraali (luku 6) ja integraalilaskennan sovellukset (luku 7). Näistä pääpaino on kahdella ensimmäisellä. Sovellukset luvun tarkoitus on herättää kiinnostus integraalilaskentaa kohtaan ja sitä kautta motivoida opiskelijoita perehtymään entistä syvällisemmin integraalilaskennan laaja-alaiseen maailmaan.

Oppimateriaali on tarkoitettu lukion pitkän matematiikan opiskelijoille, jotka ensimmäistä kertaa tutustuvat integraalilaskentaan. Tämän vuoksi materiaali on pyritty tekemään siten, että se on helppo lukuinen ja siinä on paljon esimerkkejä. Tutkielma on jäsennelty matemaattiseen tapaa: määritelmät, lauseet ja niiden todistukset sekä esimerkit. Vaikeat lauseiden todistukset ja liiallinen lauseiden matemaattinen käsittely on kuitenkin jätetty materiaalista pois, koska ne eivät tue oppimistavoitteita tämän kurssin osalta.

Koko tutkielman pohjana on ollut Lukion opetussuunnitelman perusteissa mainitut tavoitteet ja reunaehdot. Tutkielman lähteinä on käytetty kirjallisuutta ja Internet lähteitä. Kirjallisuuden suomenkieliset teokset ovat pääasiassa eri kustantajien integraalilaskennan oppikirjoja lukiotasolta. Näiden lisäksi tutkielmassa on käytetty muun muassa ammattikorkeakoulujen matematiikan oppikirjoja, sekä yliopistotasoisia englanninkielisiä teoksia matematiikan ja fysiikan aloilta. Sovellusesimerkkien löytämiseen on hyödynnetty esimerkiksi lääketieteen pääsykoekirjoja ja ydinvoimatekniikan oppikirjoja.

2 Kurssin tavoite

Tämän kurssin tavoitteet on määritelty Lukion opetussuunnitelman perusteissa [21, s. 123]. Siellä mainitaan seuraavat tavoitteet:

Kurssin suoritettuaan opiskelija

- ymmärtää integraalifunktion käsitteen ja osaa määrittää alkeisfunktioiden integraalifunktioita,
- ymmärtää määrätyn integraalin käsitteen ja sen yhteyden pinta-alaan,
- osaa määrittää tilavuuksia ja pinta-aloja määrätyn integraalin avulla,
- on perehtynyt integraalilaskennan sovelluksiin.

Kurssin keskeiset sisällöt ovat Lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan seuraavat:

- Integraalifunktio,
- alkeisfunktioiden integraalifunktiot,
- määrätty integraali,
- pinta-alan ja tilavuuden laskeminen määrätyn integraalin avulla.

Edellä mainittujen tavoitteiden pohjalta lähdemme tutustumaan integraalilaskentaan.

Ensin määrittelemme *integraalifunktion* ja tutustumme siihen muutaman esimerkin avulla. Sen jälkeen ryhdymme integroimaan *alkeisfunktioita* ja opettelemaan integrointimenetelmiä, joita ovat mm. *osittaisintegrointi* ja *sijoitusmenetelmä* eli muuttujanvaihto.

Kun alkeisfunktioiden integrointi ja tärkeimmät integrointimenetelmät ovat hallussamme, siirrymme tarkastelemaan *määrättyjä integraaleja*. Ensin määrittelemme määrätyn integraalin porrasfunktioiden avulla. Määrätyn integraalin avulla pääsemme käsiksi pinta-aloihin ja tilavuuksiin ja sitä kautta integraalilaskennan lukemattomiin sovelluskohteisiin. Näistä sovelluskohteista on esimerkkejä luvussa 7.

2.1 Ajankäyttöehdotus

Tämän kurssin täkeimmät tavoitteet ovat siis oppia integralifunktion käsite, alkeisfunktioiden integrointi, määrätyn integraalin käsite ja sen yhteys pinta-alaan, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen määrätyn integraalin avulla sekä sovelluskohteisiin tutustuminen. Luvussa 7 esitetyt sovelluskohteet ovat tämän kurssin vaatimustasoon nähden melko hankali, mutta niihin on kuitenkin hyvä tutustua, jotta kokonaiskuva integraalilaskennasta hahmottuisi paremmin. Niiden taustalla olevaa laskentaa ei kuitenkaan tarvitse osata, jos se ylittää aiemmissa luvuissa esitetyn vaatimustason.

Hieman vähemmälle huomiolle jäävät murtofunktion integrointi, ositteisintegrointi sekä sijoitusmenetelmä, jotka käydään läpi vain esimerkinomaisesti. Nämäkin asiat ovat hyvin tärkeitä, mutta tämä kurssi on integraalilaskennan peruskurssi, joten päähuomio on hyvä keskittää perusasioiden ja -käsitteiden oppimiseen ja omaksumiseen.

Taulukossa 2.1 on esitetty ajankäyttöehdotus tämän kurssin suorittamiselle. Ajankäyttöehdotus on laadittu sen pohjalta, että kurssi suoritetaan useamman kokeen avulla. Kurssiin kuuluu kaksi pienempää (45 min) välikoetta ja perinteinen loppukoe (2x45 min), johon kuuluu koko kurssin aihealue. Kokonaisarvosana muodostuu periaatteella: 25 % per välikoe, 40 % loppukoe ja 10 % tuntiaktiivisuus. Koko kurssin tuntimäärä on 38 oppituntia (45 min), joka voisi jakautua seuraavalla tavalla.

Ajankäyttöehdotus	
Aihe	**Tuntimäärä (*45 min)**
Integraalifunktio	3
Alkeisfunktioiden integrointi	4
Yhdistetyn funktion integrointi	2
Paloittain määritellyn funktion integrointi	2
Välikoe 1	**1**
Murtofunktion integrointi	2
Osittaisintegrointi	1
Sijoitusmenetelmä	1
Määrätty integraali	4
Määrätyn integraalin laskusääntöjä	2
Pinta-ala	5
Välikoe 2	**1**
Tilavuus	5
Sovellukset	3
Loppukoe	**2**
YHTEENSÄ	38

Taulukko 2.1: Ajankäyttöehdotus.

Ajatus kokeenhajautuksen taustalla on se, että nyt opiskelijat joutuvat valmistautumaan kokeeseen useamman kerran, joten "viimeisen illan"ongelma poistuu. Tämän lisäksi näin toteutettuna opiskelijoilla on paremmat edellytykset oppia seuraava kurssilla käsitelty asia, koska aiempi asia on jo kertaalleen jouduttu opettelemaan kunnolla välikokeen vuoksi. Myös loppukokeeseen valmistautuminen helpottuu, koska 2/3 kurssin asioista on jo opeteltu kunnolla, eikä niitä tarvitse enää kuin kerrata. Lisäksi saman asian uudelleen prosessointi ja kertaaminen jättävät sen paremmin mieleen.

Yhtenä etuna mainittakoon vielä, että välikokeiden avulla opettaja voi kartoittaa osaamisen tasoa jo kurssin aikana. Jos osaamisessa on selviä puutteita, toimenpiteisiin on mahdollisuus ryhtyä heti ja asiat voidaan korjata jo kurssin aikana ennen loppukoetta. Tällöin oppimistulokset paranevat.

2.2 Muuta

Tämä materiaali on tehty Tampereen yliopistolle pro gradu -tutkielmana, joten ajan ja resurssien vähyyden vuoksi materiaalin ulkoasu ei ole loppuun asti viimeistelty.

Muutamia lähdeviittauksia:

- Luku 4 perustuu lähteisiin [12, 16, 26, 27, 28],
- alaluku 6.1 perustuu lähteisiin [2, 24],
- alaluku 6.2 perustuu lähteeseen [7, Luku 7].

Tässä materiaalissa oletetaan, että raja-arvon määrittäminen, jatkuvuus ja derivointi tunnetaan.

3 Integraalilaskennan peruslause

Seuraavassa lauseessa esitetään *Integraalilaskennan peruslause* ikään kuin pohjatiedoksi jatkoa ajatellen. Tämän lauseen lisäksi derivointikaavat olisi hyvä kerrata, jos ne ovat päässeet unohtumaan.

Lause 3.1. [14, Luku 5]. Jos $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$, niin f on vakiofunktio välillä I.

Todistus. Sivuutetaan. □

4 Integraalilaskennan taustaa

Integraali on nimenomaan mittaamiseen liittyvä käsite. Integraalilaskenta juontaa juurensa aina antiikin Kreikkaan ja Arkhimedesiin asti (noin 200-300 eaa.). Jo tuolloin pyrittiin kehittämään menetelmiä, joiden avulla pinta-aloja pystyttäisiin määrittämään tarkasti. Kuitenkaan irrationaalilukuja ja analyyttistä geometriaa ei vielä tunnettu, joten integraalilaskennan kehittäminen oli mahdotonta. Tämä kehitysaskel tapahtuikin vasta 1600-luvun lopulla, kun parivaljakko Newton ja Leibniz keksi integraalifunktion ja määrätyn integraalin välisen yhteyden. Myöhemmin heidän käyttämäänsä integraalin määritelmää on tarkenneltu useaan otteeseen. Vielä nykyäänkin integraalille on useita eri määritelmiä, joista lienee yleisin on Riemann-integraali, joka määrittelee alueen pinta-alan porrasfunktioiden avulla. Tämä määritelmä on helpompi ymmärtää, kuin esimerkiksi yleisempi Lebesgue-integraali, ja sen vuoksi se on vieläkin yleisesti käytössä. Integraalilaskennan peruskäsitteet ovat *integraalifunktio* ja *määrätty integraali*.

4.1 Määritelmiä

Integraalifunktio: Integrointi on derivoinnin käänteistoimitus. Näin ollen funktion f integraalifunktioita ovat funktiot joiden derivaatta on f. Integraalifunktio ei siis ole yksikäsitteinen, vaan integraalifunktiot eroavat toisistaan vakiolla C. Integraalifunktiota kutsutaan myös määräämättömäksi integraaliksi tai antiderivaataksi. Huomaa, että määräämätön integraali ei ole funktio vaan funktiojoukko.

Määrätty integraali ei puolestaan ole funktio, vaan lukuarvo tai pikemminkin raja-arvo. Määrätyn integraalin avulla pystytään laskemaan pinta-aloja, tilavuuksia, käyrien pituuksia ja kappaleiden painopisteitä. Tämän vuoksi integroinnilla on monia sovelluskohteita muilla tieteenaloilla, kuten fysiikassa, tähti-, tietojenkäsittely-, tilasto-, talous- ja lääketieteissä. Sitä käytetään myös muilla matematiikan aloilla, kuten todennäköisyyslaskennassa. Tämän materiaalin loppuosassa on luku sovellusesimerkeistä (luku 7), johon on kerätty muutamia käytännön esimerkkejä integraalilaskennan sovelluskohteista.

Alkeisfunktioita ovat muun muassa potenssi-, polynomi-, rationaali-, juuri- ja logaritmifunktiot, eksponenttifunktiot sekä trigonometriset funktiot.

5 Integraalifunktio

Tässä luvussa tutustutaan tarkemmin integraalifunktion käsitteeseen ja sen määrittämiseen. Jo alaluvussa 4.1 kerrottiin mitä tarkoittaa integraalifunktio. Seuraavassa on esitetty integraalifunktion tarkempi määritelmä.

Määritelmä 5.1. [20, Sivu 26] Olkoon funktio f määritelty välillä I. Funktio F on funktion f integraalifunktio tällä välillä, jos

$$F'(x) = f(x)$$

jokaisessa määrittelyvälin I pisteessä x. Tällöin F on on funktion f integraalifunktio.

Määritelmän 5.1 mukaan välillä I funktiolla F on olemassa derivaatta $F'(x)$. Tällöin funktio on derivoituva, joten F on myös jatkuva välillä I.

Esimerkki 5.1. Osoita, että funktio $F(x) = 2x^3 + 4x - 7$ on funktion $f(x) = 6x^2 + 4$ integraalifunktio.

Todistus. Käytetään hyväksi määritelmää 5.1 ja osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = D\Big(2x^3 + 4x - 7\Big) = 6x^2 + 4 = f(x).$$

□

Huomaa, että edellä olevassa esimerkissä funktion $F(x)$ vakio -7 voisi olla mikä tahansa reaaliluku, mutta funktion derivaatta olisi silti $6x^2+4$. Integraalifunktio ei siis ole yksikäsitteinen, kuten jo alaluvussa 4.1 todettiin.

Lause 5.1. [16, Sivu 198]. Jos funktiolla $f(x)$ on integraalifunktio $F_0(x)$ välillä I, niin funktion $f(x)$ kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) = F_0(x)+C$, missä $C \in \mathbb{R}$. Toisaalta jokainen muotoa $F_0(x) + C$ oleva funktio on funktion $f(x)$ integraalifunktio välillä I.

Todistus. [15, Luku 3].

1. Jokainen muotoa $F_0(x) + C$ oleva funktio on funktion $f(x)$ integraalifunktio välillä I, koska

$$D(F_0(x) + C) = D(F_0(x)) + D(C) = D(F_0(x)) + 0 = f(x).$$

2. Olkoon $F(x)$ yksi funktion $f(x)$ integraalifunktioista välillä I. Tällöin

$$D(F_0(x) - F(x)) = f(x) - f(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in I,$$

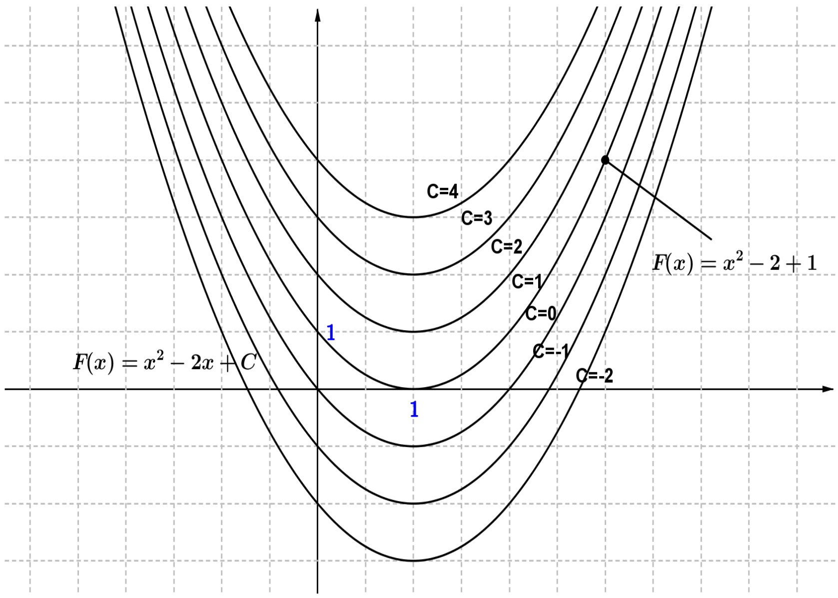
joten lauseen 3.1 nojalla $F_0(x)-F(x)$ on vakio. Siis on olemassa sellainen $C \in \mathbb{R}$, että $F_0(x) - F(x) = C$ kaikilla $x \in I$. Täten $F_0(x) = F(x) + C$.

□

Integraalifunktio ei siis ole funktio, vaan funktiojoukko, koska *integrointivakio* C käy läpi kaikki reaaliluvut. Graafisesti käyrän muoto pysyy samana, mutta C kertoo käyrän sijainnin y-akselilla. Seuraava esimerkki selventää asiaa.

Esimerkki 5.2. Määritä funktion $f(x) = 2x - 2$ kaikki integraalifunktiot. Mikä integraalifunktioista kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta?

Ratkaisu: Funktion $f(x)$ integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) = x^2 - 2x + C$, missä C on vakio.



Kuva 5.1: Integraalifunktiojoukko muutamalla C:n arvolla.

Pisteen $(3, 4)$ kautta kulkee funktio $F(x) = x^2 - 2x + 1$ (ks. kuva 5.1).

5.1 Alkeisfunktioiden integrointikaavat

Integrointi on siis derivoinnin käänteislaskutoimitus. Esimerkiksi potenssifunktion tapauksessa derivointi pienensi potenssifunktion astetta yhdellä, joten integrointi kasvattaa sitä yhdellä.

Jo heti aluksi on hyvä palauttaa mieleen vakiofunktion derivointi. Vakiofunktion derivaattahan oli nolla. Tämän vuoksi integroidessa jotakin funktiota, ei voida tietää vakion arvoa. Siksi integrointivakiota merkitään symbolilla C, joka voi olla mikä tahansa reaaliluku.

Määritellään nyt määräämättömän integraalin merkintä.

Määritelmä 5.2. Funktion $f(x)$ integraalifunktioita merkitään

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C,$$

missä $F(x)$ on jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio ja C on integrointivakio.

Seuraavassa on esitetty muutama perusintegrointikaava, jotka voidaan johtaa suoraan samaisista derivointikaavoista integroimalla ne puolittain. Huomaa, että tulokset ovat voimassa vain integroitavien funktioiden määrittelyalueilla.

Lause 5.2.

(5.1) $\int 0\ dx = C,$ nollan integrointi,

(5.2) $\int k\ dx = kx + C,$ missä k on vakio, vakion integrointi,

(5.3) $\int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$ potenssifunktion integrointi.

Todistus. Todistetaan esimerkinomaisesti kaava (5.3) (muut vastaavasti). Osoitetaan, että derivoimalla yhtälön oikepuoli, saadaan merkkien $\int$ ja dx välissä oleva lauseke.

$$D\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^{n+1-1} + 0 = x^n,\ n \neq -1.$$

□

Esimerkki 5.3. Määritä seuraavien funktioiden integraalifunktiot.

a) $f(x) = 12,$ b) $g(x) = x,$ c) $h(x) = x^6.$

Ratkaisu:

a) $F(x) = \int 12\, dx = \underline{12x + C},$ | vakion integrointi

b) $G(x) = \int x\, dx = \dfrac{1}{1+1}x^{1+1} + C = \underline{\dfrac{1}{2}x^2 + C},$ | potenssifunkt. integrointi

c) $H(x) = \int x^6\, dx = \dfrac{1}{6+1}x^{6+1} + C = \underline{\dfrac{1}{7}x^7 + C}.$ | potenssifunkt. integrointi

Jo nyt alkuvaiheessa on hyvä opetella tarkistamaan saatu lopputulos. Integrointi on derivoinnin käänteislaskutoimitus ja derivointi on usein helpompi suorittaa, kuin integrointi. Tämän vuoksi kannattaa opetella *tarkistusderivoimaan* (TD) saadut ratkaisut virheiden välttämiseksi. Tarkistetaan esimerkiksi esimerkin 5.3 c-kohta:

$$D\left(\frac{1}{7}x^7 + C\right) = 7\frac{1}{7}x^{7-1} + 0 = x^6.$$

Tarkistusderivointi on helpoimmissa tapauksissa helppo suorittaa päässälaskuna. Vaikeammissa tapauksissa se kannattaa suoritta paperilla. TD:n kanssa kannattaa kuitenkin olla varovainen, sillä joskus voi käydä niin, että tekee tarkistusderivoinnissa virheen, vaikka integrointi olisikin suoritettu oikein, ja tämä voi pilata koko tehtävän.

Käydään seuraavaksi läpi *vakion siirto* ja *summan integrointi*, jotta päästään integroimaan polynomifunktoita.

Lause 5.3.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,\ \text{missä k on vakio,} \qquad \text{vakion siirto,} \tag{5.4}$$

$$\int \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx, \qquad \text{summan integrointi.} \tag{5.5}$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
&(5.4)\ D\left(k\int f(x)\,dx\right) = kD\left(\int f(x)\,dx\right) = kf(x),\\
&\qquad \text{joten} \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.\\
&(5.5)\ D\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = D\left(\int f(x)\,dx\right) + D\left(\int g(x)\,dx\right)\\
&\qquad = f(x)+g(x),\ \text{joten} \int \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 5.4. Laske.

a) $\displaystyle\int \Big(2x^4+5x^{-3}-3\Big)\,dx,\ x\neq 0,$ b) $\displaystyle\int 13\Big(3x^2+12x\Big)\,dx,$

c) $\displaystyle\int (3x-8)^2\,dx,$ d) $\displaystyle\int \frac{3x^4+x^2}{2x^2}\,dx,\ x\neq 0.$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\text{a)} &\int \Big(2x^4+5x^{-3}-3\Big)\,dx && \Big|\ \text{sum. int.}\\
&= \int 2x^4\,dx + \int 5x^{-3}\,dx + \int(-3)\,dx && \Big|\ \text{vakion siirto}\\
&= 2\int x^4\,dx + 5\int x^{-3}\,dx - 3\int 1\,dx\\
&= 2\cdot\left(\frac{1}{5}x^5 + C_1\right) + 5\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-2}+C_2\right) - 3\cdot\Big(x+C_3\Big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^{-2} - 3x + \underbrace{2C_1 + 5C_2 - 3C_3}_{=C}$$

$$= \underline{\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^{-2} - 3x + C}, \text{ kun } x \neq 0,$$

b) $\int 13\left(3x^2 + 12x\right) dx$ | vakion siirto

$= 13 \int \left(3x^2 + 12x\right) dx$ | sum. int.

$$= 13\left(\int 3x^2 \, dx + \int 12x \, dx\right)$$

$$= 13\left(x^3 + C_1 + 6x^2 + C_2\right)$$

$$= 13x^3 + 78x^2 + \underbrace{13C_1 + 13C_2}_{=C}$$

$$= \underline{13x^3 + 78x^2 + C},$$

c) $\int (3x - 8)^2 \, dx$ | binomin neliö

$= \int \left(9x^2 - 48x + 64\right) dx$ | sum. int.

$= \int 9x^2 \, dx + \int (-48x) \, dx + \int 64 \, dx$ | vakion siirto

$$= 9 \int x^2 \, dx - 48 \int x \, dx + 64 \int 1 \, dx$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 9C_1 - 48 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 48C_2 + 64x + 64C_3$$

$$= \underline{3x^3 - 24x^2 + 64x + C},$$

d) $\int \frac{3x^4 + x^2}{2x^2} \, dx$

$$= \int \left(\frac{3x^4}{2x^2} + \frac{x^2}{2x^2}\right) dx$$

$= \int \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) dx$ | sum. int.

$$= \int \frac{3}{2}x^2\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= \frac{3}{2}\int x^2\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}C_1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}C_2$$

$$= \underline{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + C}, \text{ kun } x \neq 0.$$

Integroitaessa on myös hyvä kiinnittää huomiota siihen, minkä muuttujan suhteen integroidaan. Edellä olevissa tehtävissä on muuttujana käytetty x:ää. Muuttuja voi kuitenkin olla mikä tahansa symboli, vaikka α. Tällöin merkittäisiin $\int f(\alpha)\,d\alpha$. Muita kuin integrointisymboleita käsitellään vakioina.

Esimerkki 5.5. Laske

a) $\int \left(5\alpha^{\frac{4}{5}}\right)dx$, b) $\int \left(5\alpha^{\frac{4}{5}}\right)d\alpha$,

c) $\int \left(2x^3 + \frac{1}{4}y^4 - 3\beta\right)dy$, d) $\int \frac{\sqrt{3x^4}+\epsilon}{x^3}\,d\epsilon,\ x \neq 0.$

Ratkaisu:

a) $$\int \left(5\alpha^{\frac{4}{5}}\right)dx \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= 5\alpha^{\frac{4}{5}}\int 1\,dx$$

$$= \underline{5\alpha^{\frac{4}{5}}x + C},$$

b) $$\int \left(5\alpha^{\frac{4}{5}}\right)d\alpha \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= 5\int \alpha^{\frac{4}{5}}\,d\alpha$$

$$= 5\cdot\frac{5}{9}\alpha^{\frac{9}{5}} + C$$

$$= \underline{\frac{25}{9}\alpha^{\frac{9}{5}} + C},$$

c) $$\int \left(2x^3 + \frac{1}{4}y^4 - 3\beta\right)dy \qquad \Big|\ \text{summan integrointi}$$

$$= \int 2x^3\,dy + \int \frac{1}{4}y^4\,dy + \int (-3\beta)\,dy \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= 2x^3 \int 1\,dy + \frac{1}{4}\int y^4\,dy - 3\beta\int 1\,dy$$

$$= 2x^3 y + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}y^5 - 3\beta y + C$$

$$= \underline{\frac{1}{20}y^5 + \left(2x^3 - 3\beta\right)y + C},$$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x^4}+\epsilon}{x^3}\,d\epsilon$

$$= \int \frac{\sqrt{3}x^2+\epsilon}{x^3}\,d\epsilon$$

$$= \int \left(\frac{\sqrt{3}x^2}{x^3} + \frac{\epsilon}{x^3}\right)d\epsilon \qquad \Big|\ \text{summan integrointi}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3}}{x}\,d\epsilon + \int \frac{\epsilon}{x^3}\,d\epsilon \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{x}\int 1\,d\epsilon + \frac{1}{x^3}\int \epsilon\,d\epsilon$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{x}\epsilon + \frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{2}\epsilon^2 + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2x^3}\epsilon^2 + \frac{\sqrt{3}}{x}\epsilon + C},\ \text{kun } x \neq 0.$$

Harjoitustehtävänä voit tarkistaa esimerkin 5.5 kohdat a-b tarkistusderivoimalla. Onko tehtävä laskettu oikein?

Laajennetaan vielä lisää integrointikaavojemme repertuaaria. Taas on pidettävä mielessä, että tulokset ovat voimassa vain integroitavien funktioiden määrittelyalueilla.

Lause 5.4.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, x \neq 0, \qquad \text{funktion } \frac{1}{x} \text{ integrointi,} \tag{5.6}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \text{funktion } e^x \text{ integrointi,} \tag{5.7}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, \qquad \text{funktion } a^x \text{ integrointi,} \tag{5.8}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \text{sinifunktion integrointi,} \tag{5.9}$$

$$(5.10) \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \text{kosinifunktion integrointi.}$$

Todistus. Todistetaan kaavat (5.6), (5.8) ja (5.9). Muut harjoitustehtävinä.

(5.6) Jaetaan funktion $\ln|x|$ tarkastelu osiin itseisarvojen vuoksi:

$$D\Big(\ln x + C\Big) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}, \text{kun } x > 0.$$

$$D\Big(\ln(-x) + C\Big) = \frac{1}{-x}(-1) + 0 = \frac{1}{x}, \text{kun } x < 0.$$

(5.8) $D\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right) = D\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right) + 0 = \dfrac{1}{\ln a} \cdot D\Big(a^x\Big) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x.$

(5.9) $D\Big(-\cos x + C\Big) = -(-\sin x) + 0 = \sin x.$

□

Esimerkki 5.6. Määritä

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}\sin x + 2e^x + \frac{1}{2x}\right) dx, x \neq 0,$ b) $\displaystyle\int (\cos x + 2) \, dx,$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{3}\Big(5^x + \sin x\Big) - \frac{12}{x}\right) dx, \; x \neq 0.$

Ratkaisu:

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}\sin x + 2e^x + \frac{1}{2x}\right) dx$ | summan integrointi

$\displaystyle= \int \frac{1}{3}\sin x \, dx + \int 2e^x \, dx + \int \frac{1}{2x} \, dx$ | vakion siirto

$$= \frac{1}{3}\int \sin x \, dx + 2\int e^x \, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos x) + 2e^x + \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$= \underline{-\frac{1}{3}\cos x + 2e^x + \frac{1}{2}\ln|x| + C}, \text{ kun } x \neq 0,$$

b) $\displaystyle\int (\cos x + 2) \, dx$ | summan integrointi

$\displaystyle= \int \cos x \, dx + \int 2 \, dx$ | vakion siirto

$$= \int \cos x \, dx + 2 \int 1 \; dx$$

$$= \underline{\sin x + 2x + C},$$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{3}\big(5^x + \sin x\big) - \frac{12}{x} \right) dx$ $\quad\Big|$ summan integrointi

$\displaystyle= \int \frac{2}{3}\big(5^x + \sin x\big) \, dx + \int \left(-\frac{12}{x} \right) dx$ $\quad\Big|$ vakion siirto

$\displaystyle= \frac{2}{3} \int \big(5^x + \sin x\big) \, dx - 12 \int \frac{1}{x} \, dx$ $\quad\Big|$ summan integrointi

$$= \frac{2}{3} \int 5^x \, dx + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx - 12 \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{2}{3}(-\cos x) - 12 \ln |x| + C$$

$$= \underline{\frac{2 \cdot 5^x}{3 \cdot \ln 5} - \frac{2}{3} \cos x - 12 \ln |x| + C}, \text{ kun } x \neq 0.$$

Esimerkki 5.7. Määritä

a) $\displaystyle\int \left(2\cos x - \frac{e^x}{4} \right) dx,$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin x - x^3}{3} \, dx,$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{2^x}{2} + \frac{8}{x} + \frac{\cos x}{5} \right) dx, \; x \neq 0.$

Ratkaisu:

a) $\displaystyle\int \left(2\cos x - \frac{e^x}{4} \right) dx$ $\quad\Big|$ summan integrointi

$\displaystyle= \int 2\cos x \, dx + \int \left(-\frac{e^x}{4} \right) dx$ $\quad\Big|$ vakion siirto

$$= 2 \int \cos x \, dx - \frac{1}{4} \int e^x \, dx$$

$$= \underline{2\sin x - \frac{1}{4} e^x + C},$$

$$\text{b)} \int \frac{\sin x - x^3}{3}\,dx \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big(\sin x - x^3\Big)\,dx \qquad \Big|\ \text{summan integrointi}$$

$$= \frac{1}{3}\Bigg(\int \sin x\,dx + \int \Big(-x^3\Big)\,dx\Bigg)$$

$$= \frac{1}{3}\Bigg(-\cos x - \frac{1}{4}x^4\Bigg) + C$$

$$= \underline{-\frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{12}x^4 + C},$$

$$\text{c)} \int \Bigg(\frac{2^x}{2} + \frac{8}{x} + \frac{\cos x}{5}\Bigg)\,dx \qquad \Big|\ \text{summan integrointi}$$

$$= \int \frac{2^x}{2}\,dx + \int \frac{8}{x}\,dx + \int \frac{\cos x}{5}\,dx \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= \frac{1}{2}\int 2^x\,dx + 8\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{5}\int \cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + 8\ln|x| + \frac{1}{5}\sin x + C$$

$$= \underline{\frac{2^{x-1}}{\ln 2} + 8\ln|x| + \frac{1}{5}\sin x + C}, \text{ kun } x \neq 0.$$

5.2 Yhdistetyn funktion integrointi

Suuri osa integroitavista funktioista on yhdistettyjä funktioita. Yhdistetyn funktion integrointisääntö saadaan yhdistetyn funktion derivointikaavasta seuraavasti:

$$Dg\Big(f(x)\Big) = g'\Big(f(x)\Big)\cdot f'(x),$$

joten

$$\int \Big(g'\Big(f(x)\Big)\cdot f'(x)\Big)\,dx = g\Big(f(x)\Big) + C.$$

Yhdistettyä funktiota integroidessa on siis edullista pyrkiä siihen, että saattaa integroitavan funktion kahden funktion tuloksi siten, että toinen on toisen sisäfunktion derivaatta. Tämän jälkeen yhdistetyn funktion integrointisääntöä voidaan soveltaa suoraan ja integrointi sujuu vaivatta.

Esimerkki 5.8. Integroi

$$\text{a)} \int 12(12x+2)^3 \; dx, \qquad \text{b)} \int (12x+2)^3 \; dx,$$

$$\text{c)} \int \sqrt{4x-2} \; dx, \; x \geq \frac{1}{2}, \qquad \text{d)} \int \cos x \sin^4 x \; dx.$$

Ratkaisu:

$$\text{a)} \int \underbrace{12}_{f'(x)} \underbrace{(12x+2)^3}_{g'(f(x))} \; dx$$

$$= \underline{\frac{1}{4}(12x+2)^4 + C,}$$

$$\text{b)} \int (12x+2)^3 \; dx$$

$$= \int \frac{1}{12} \cdot 12(12x+2)^3 \; dx \qquad \Big| \text{ vakion siirto}$$

$$= \frac{1}{12} \int \underbrace{12}_{f'(x)} \underbrace{(12x+2)^3}_{g'(f(x))} \; dx$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4}(12x+2)^4 + C$$

$$= \underline{\frac{1}{48}(12x+2)^4 + C,}$$

$$\text{c)} \int \sqrt{4x-2} \; dx$$

$$= \int (4x-2)^{\frac{1}{2}} \; dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \cdot 4(4x-2)^{\frac{1}{2}} \; dx \qquad \Big| \text{ vakion siirto}$$

$$= \frac{1}{4} \int \underbrace{4}_{f'(x)} \underbrace{(4x-2)^{\frac{1}{2}}}_{g'(f(x))} \; dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \underline{\frac{1}{6}(4x-2)^{\frac{3}{2}} + C,} \text{ kun } x \geq \frac{1}{2},$$

$$\text{d)} \int \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \underbrace{\sin^4 x}_{g'(f(x))} \; dx$$

$$= \underline{\frac{1}{5}\sin^5 x + C.}$$

Esimerkki 5.9. Integroi

a) $\int \Big(\cos 2x + e^{2x-3}\Big)\,dx,$ b) $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx,\ x \neq -\frac{1}{2},$

c) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^{3x}}\right) dx,\ x \neq 0.$

Ratkaisu:

a) $\int \Big(\cos 2x + e^{2x-3}\Big)\,dx$ | summan integrointi

$$= \int \cos 2x\,dx + \int e^{2x-3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}e^{2x-3} + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\Big(\sin 2x + e^{2x-3}\Big) + C,}$$

b) $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2x+1}\cdot\frac{1}{2} + C$$

$$= \underline{-\frac{1}{4x+2} + C},\ x \neq -\frac{1}{2},$$

c) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^{3x}}\right) dx$ | summan integrointi

$$= \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{e^{3x}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{3x}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3e^{3x}} + C$$

$$= \underline{\frac{1}{3e^{3x}} - \frac{1}{x} + C},\ x \neq 0.$$

Jos edellä esitetty tapa ei joissain tilanteissa toimi, kannattaa yrittää kertoa sulkulauseke auki ja integroida se sitten normaaliin tapaan.

Esimerkki 5.10. Integroi

$$\text{a)} \int x^4(2+3x)^2\,dx, \qquad \text{b)} \int \left(x^5+1\right)^3 dx.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\text{a)} &\int x^4(2+3x)^2\,dx \\
&= \int x^4(2+3x)(2+3x)\,dx \\
&= \int x^4\left(4+6x+6x+9x^2\right) dx \\
&= \int \left(4x^4+12x^5+9x^6\right) dx && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \underline{\frac{4}{5}x^5+2x^6+\frac{9}{7}x^7+C.}
\end{aligned}$$

b) Kyseessä on binomin kuutio, jonka kertoimet saadaan Pascalin kolmiosta.

$$\begin{aligned}
&\int \left(x^5+1\right)^3 dx \\
&= \int \left(1\cdot x^{5\cdot 3}+3\cdot x^{5\cdot 2}\cdot 1+3\cdot x^5\cdot 1^2+1\cdot 1^3\right) dx \\
&= \int \left(x^{15}+3x^{10}+3x^5+1\right) dx && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \underline{\frac{1}{16}x^{16}+\frac{3}{11}x^{11}+\frac{1}{2}x^6+x+C.}
\end{aligned}$$

Monimutkaisia lausekkeita integroidessa käy monesti niin, että $g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$ muodon löytäminen on vaikeaa. Tällöin yhdistetyn funktion integrointisäännön käyttö hankaloituu.Tämän ongelman ratkaisuun on kuitenkin kehitetty menetelmä nimeltään *muuttujanvaihto*. Menetelmä perustuu siihen, että muuttujasta x siirrytään uuteen muuttujaan $t = f(x)$, jolloin $dt = f'(x)\,dx$. Palaamme tämän menetelmän tarkempaan käsittelyyn myöhemmin tässä luvussa.

5.3 Paloittain määritellyn funktion integrointi

Tässä alaluvussa opetellaan integroimaan paloittain määriteltyjä funktioita. Koska käsiteltävät funktiot ovat paloittain määriteltyjä, on hyödyllistä tarkistaa funktion jatkuvuus, sillä jos funktio on jatkuva, on se myös integroituva.

Lause 5.5. Jokaisella jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 5.11. Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4, & \text{kun } x < 1, \\ 2x^2+5, & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$$

integraalifunktio.

Ratkaisu:

1. Tarkistetaan funktion jatkuvuus:

   Funktion f arvo kohdassa $x = 1$ on $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 5 = 7$.

   Funktion toispuoleiset raja-arvot ovat

   $$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (3x + 4) = 7,$$

   $$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \left(2x^2 + 5\right) = 7.$$

   Siis

   $$f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 7.$$

   Koska funktion arvo on sama kuin raja-arvo pisteessä $x = 1$, on funktio jatkuva kyseisessä pisteessä. Funktio on selvästi myös jatkuva, kun $x \neq 1$. Funktio $f(x)$ on siis jatkuva, joten sillä on olemassa integraalifunktio.

2. Määritetään funktion $f(x)$ integraalifunktio $F(x)$:

   $$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 4x + C_1, & \text{kun } x < 1, \\ \frac{2}{3}x^3 + 5x + C_2, & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$$

   missä C_1 ja C_2 ovat integrointivakioita.

   Koska integraalifunktio $F(x)$ on derivoituva, on se myös jatkuva. Näin ollen

   $$F(1) = \lim_{x \to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1+} F(x)$$

   eli

   $$\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 + C_2 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + C_1.$$

   Nyt

   $$\frac{2}{3} + 5 + C_2 = \frac{3}{2} + 4 + C_1,$$

   joten

   $$C_2 = C_1 - \frac{1}{6}.$$

Merkitään $C_1 = C$, jolloin integraalifunktioksi saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 4x + C, & \text{kun } x < 1, \\ \frac{2}{3}x^3 + 5x - \frac{1}{6} + C, & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$$

missä C on integrointivakio.

Esimerkki 5.12. Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & \text{kun } x < 0, \\ e^{4x} + 2, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(2, 3)$ kautta.

Ratkaisu:

1. Tarkistetaan funktion jatkuvuus:

   Funktion f arvo kohdassa $x = 0$ on $f(0) = \underbrace{e^{4\cdot 0}}_{=1} + 2 = 3$.

   Funktion toispuoleiset raja-arvot ovat

   $$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (4x + 3) = 3.$$

   $$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(e^{4x} + 2\right) = 3.$$

   Siis

   $$f(0) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 3.$$

   Koska funktion arvo on sama kuin raja-arvo pisteessä $x = 0$, on funktio jatkuva kyseisessä pisteessä. Funktio on selvästi myös jatkuva, kun $x \neq 0$. Funktio $f(x)$ on siis jatkuva, joten sillä on olemassa integraalifunktio.

2. Määritetään funktion $f(x)$ integraalifunktio $F(x)$:

   $$F(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + C_1, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{4}e^{4x} + 2x + C_2, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

   missä C_1 ja C_2 ovat integrointivakioita.

   Koska integraalifunktio $F(x)$ on derivoituva, on se myös jatkuva. Näin ollen

   $$F(0) = \lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0+} F(x)$$

   eli

   $$\frac{1}{4}e^{4\cdot 0} + 2 \cdot 0 + C_2 = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + C_1.$$

Nyt siis

$$\frac{1}{4} + C_2 = C_1.$$

Koska $F(x)$:n kuvaaja kulkee pisteen $(2,3)$ kautta, niin

$$3 = F(2) = \frac{1}{4}e^{4\cdot 2} + 2\cdot 2 + C_2,$$

joten

$$C_2 = -1 - \frac{1}{4}e^8$$

ja

$$C_1 = \frac{1}{4} + C_2 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^8.$$

Näin ollen kysytty integraalifunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^8, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{4}e^{4x} + 2x - 1 - \frac{1}{4}e^8, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

5.4 Murtofunktion integrointi

Rationaalilauseke on lauseke, jossa kaksi polynomia jaetaan keskenään. Siis jos $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja, saa rationaalilauseke muodon $\frac{P(x)}{Q(x)}$, missä $Q(x) \neq 0$. Jos polynomia $Q(x)$ ei voida kokonaisuudessaan supistaa pois, eli nimittäjään jää muuttujia supistuksen jälkeen, kutsutaan rationaalilauseketta murtolausekkeeksi.

Huomaa, että esimerkiksi lauseke $\frac{1}{x^2-1}$ on rationaalilauseke, mutta $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ei ole, sillä $\sqrt{x}$ ei ole polynomi.

Murtolauseketta joudutaan usein muokkaamaan ennen integrointia seuraavilla tavoilla:

- Jakokulma ja supistaminen. Jakokulmaa käytetään, kun nimittäjän asteluku on sama tai pienempi kuin osoittajan asteluku.
- Osamurtoihin jako. Käytetään silloin, kun osoittajan asteluku on pienempi kuin nimittäjän ja nimittäjä jakautuu tekijöihin.

Kun integroitava funktio on saatu sopivaan muotoon, käytetään lauseessa 5.4 esitettyä murtofunktion integrointikaavaa $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ (kaava (5.6)) murtolausekkeen integroimiseksi. Rajoitumme siis tutkimaan vain yhtä murtofunktioiden erikoistapausta.

Seuraavaksi tutustumme siis murtofunktioiden integrointiin jakokulman sekä osamurtoihin jaon avulla. Nämä laskentamenetelmät eivät ole tämän kurssin osalta keskeisessä osassa, joten käymme ne vain lyhyesti läpi muutaman esimerkin avulla.

5.4.1 Jakokulma ja supistaminen

Aina ensin kannattaa nimittäjä ja osoittaja jakaa tekijöihin ja pyrkiä supistamaan murtolauseke mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Jos tämän jälkeen osoittajan asteluku on suurempi tai sama kuin nimittäjän asteluku, kannattaa käyttää jakokulmaa lausekkeen sieventämisen apukeinona. Tarkoitus on saada integroitava lauseke muotoon $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, jonka jälkeen voidaan hyödyntää kaavaa (5.6).

Esimerkki 5.13. Integroi

$$\text{a)} \int \frac{x^3 - 4x^2 + 5x}{x^2 - x}\, dx, \qquad \text{b)} \int \frac{4x^2 + 1}{2x - 1}\, dx.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{x^3 - 4x^2 + 5x}{x^2 - x}\, dx &= \int \frac{x\left(x^2 - 4x + 5\right)}{x(x-1)}\, dx \\ &= \int \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}\, dx. \end{aligned}$$

Käytetään jakokulmaa:

$$\begin{array}{r|r} & x - 3 \\ \cline{2-2} x - 1 & x^2 - 4x + 5 \\ & -\, x^2 \;\; + x \quad\;\; \\ \cline{2-2} & -\, 3x + 5 \\ & 3x - 3 \\ \cline{2-2} & 2 \end{array}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}\, dx &= \int \left(x - 3 + \frac{2}{x - 1}\right) dx \qquad \Big|\ \text{summan integrointi} \\ &= \int x\, dx - \int 3\, dx + \int \frac{2}{x - 1}\, dx \\ &= \underline{\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\ln|x - 1| + C.} \end{aligned}$$

b) Käytetään jakokulmaa:

$$\begin{array}{r|r} & 2x + 1 \\ \cline{2-2} 2x - 1 & 4x^2 \qquad\quad + 1 \\ & -\, 4x^2 + 2x \quad\;\; \\ \cline{2-2} & 2x + 1 \\ & -\, 2x + 1 \\ \cline{2-2} & 2 \end{array}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2+1}{2x-1}\,dx &= \int \left(2x+1+\frac{2}{2x-1}\right)dx && \Big|\ \text{summan integrointi}\\
&= \int 2x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{2}{2x-1}\,dx\\
&= 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + \int \underbrace{\frac{1}{2x-1}}_{\frac{1}{f(x)}}\cdot \underbrace{2}_{f'(x)}\,dx + C_1\\
&= \underline{x^2+x+\ln|2x-1|+C}.
\end{aligned}$$

5.4.2 Osamurtoihin jako

Usein tulee vastaan tilanteita, jolloin murtolausekkeen osoittajan asteluku on pienempi kuin nimittäjän. Tällöin edellä esitetyt keinot eivät toimi ja joudumme käyttämään osamurtoihin jakoa.

Osamurtoihin jako tarkoittaa sitä, että alkuperäinen murtolauseke esitetään kahden tai useamman murtolausekkeen summana, joka on helpommin integroitavissa. Ideana on, että ensin nimittäjä jaetaan tekijöihin (alkutekijöihin) ja sen jälkeen käytetään osamurtoja

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{ja} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}.$$

Ensimmäistä muotoa olevien murtolausekkeiden integroinnin käymme läpi esimerkkien avulla, mutta jälkimmäistä muotoa olevia murtolausekkeita emme käsittele tämän kurssin puitteissa, sillä ne ovat usein hyvin hankalia integroitavia.

Esimerkki 5.14. Jaa lauseke

$$\frac{3x^2+4}{x^3-2x^2+x}$$

osamurtoihin.

Ratkaisu: Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin:

$$\begin{aligned}
x^3-2x^2+x &= x\left(x^2-2x+1\right)\\
&= x(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Nyt saadaan rationaalifunktio

$$\frac{3x^2+4}{x(x-1)^2},$$

joka kirjoitetaan muotoon

$$\frac{3x^2+4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Tarkoitus on siis ratkaista kertoimet A, B ja C. Laventamalla tekijällä $x(x-1)^2$ saadaan lausekkeen osoittajista yhtälö

$$\begin{aligned} 3x^2+4 &= A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \\ &= A(x^2-2x+1) + B(x^2+x) + Cx \\ &= (A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + A \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} A = 4, \\ -2A + B + C = 0, \\ A + B = 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmästä saadaan kertoimiksi $A = 4$, $B = -1$ ja $C = 9$. Siis

$$\underline{\frac{3x^2+4}{x(x-1)^2} = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}}.$$

Osamurtoihin jako kannattaa aina tarkistaa laventamalla saatu tulos takaisin alkuperäiseen muotoonsa. Kokeile harjoitustehtävänä tarkistaa edellinen tehtävä. Tehtiinko osamurtoihin jako oikein?

Esimerkki 5.15. Laske

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$$

käyttäen apuna osamurtoihin jakoa.

Ratkaisu: Huomataan, että $x = -1$ on yksi nimittäjän $x^2 - 4x - 5$ juurista. Tällöin

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{x-1}{(x+1)(x-5)}\,dx.$$

Suoritetaan osamurtoihin jako:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5}.$$

Laventamalla tekijällä $(x+1)(x-5)$ saadaan lausekkeen osoittajista yhtälö

$$\begin{aligned} x-1 &= A(x-5)+B(x+1) \\ &= Ax-5A+Bx+B \\ &= (A+B)x-5A+B \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -5A+B=-1. \end{cases}$$

Yhtälöparista saadaan kertoimiksi $A=\frac{1}{3}$ ja $B=\frac{2}{3}$. Nyt

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x+1)(x-5)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{3(x-5)}\right)dx && \Big|\ \text{sum. int.} \\ &= \int \left(\frac{1}{3(x+1)}\right)dx + \int \left(\frac{2}{3(x-5)}\right)dx && \Big|\ \text{vakion siirto} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-5}\,dx \\ &= \underline{\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-5| + C.} \end{aligned}$$

Yhteenvetona murtofunktion integrointi etenee seuraavasti [15, Luku 4.4]:

1. Esitetään funktio muodossa $R(x)=P_1(x)+\frac{P_2(x)}{Q(x)}$, missä polynomin $P_2(x)$ aste on pienempi kuin polynomin $Q(x)$ aste.
   ∘ Jakokulma ja supistaminen.
2. Jaetaan $Q(x)$ alkutekijöihin.
   ∘ Juurten etsintä.
3. Suoritetaan osamurtoihin jako.
4. Integroidaan osamurrot ja polynomi $P_1(x)$.

5.5 Osittaisintegrointi

Monesti tulee eteen lausekkeita, joihin ei suoraan voi soveltaa mitään edellä esitettyä integrointikaavaa. Tällöin lauseke pyritään muokkaamaan siten, että integrointisääntöjä voitaisiin taas käyttää. Näitä muokkauskeinoja on kolme, joista ensimmäinen eli osamurtoihin jako käsiteltiin jo alaluvussa 5.4.2. Tässä alaluvussa tutustumme toiseen lausekkeen muokkausmenetelmään nimeltään *osittaisintegrointi*.

Lause 5.6. [10, Sivu 20]. Olkoot f ja g derivoituvia funktioita. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\int \Big(f'g\Big)\, dx = fg - \int \Big(g'f\Big)\, dx.$$

Todistus. Tulon derivointisäännön $D\Big(fg\Big) = f'g + fg'$ perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\int D\Big(fg\Big)\, dx = \int \Big(f'g + fg'\Big)\, dx \quad &\Leftrightarrow \quad fg = \int \Big(f'g\Big)\, dx + \int \Big(fg'\Big)\, dx \\ &\Leftrightarrow \quad \int \Big(f'g\Big)\, dx = fg - \int \Big(g'f\Big)\, dx.\end{aligned}$$

□

Lauseen 5.5 kaavaa kutsutaan *osittaisintegrointisäännöksi*, jota voi joutua soveltamaan useaan otteeseen samassa tehtävässä. Myös sillä on väliä kumman tulon tekijöistä valitsee f':ksi ja kumman g:ksi, sillä monesti osittaisintegrointisääntö helpottaa tehtävän laskentaa vain, kun valinta on tehty oikeinpäin. Valinnan tekoon oppii harjoittelemalla.

Esimerkki 5.16. Laske

$$\int x^2 e^{2x}\, dx.$$

Ratkaisu: Valitaan $f'(x) = e^{2x}$ ja $g(x) = x^2$, joten $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ ja $g'(x) = 2x$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int 2x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int x \cdot e^{2x}\, dx\end{aligned}$$

soveltamalla osittaisintegrointisääntöä. Sovelletaan sitä uudestaan lausekkeeseen $\int x \cdot e^{2x}\, dx$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int x \cdot e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \left(\frac{1}{2}e^{2x}x - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x + \frac{1}{4}e^{2x} + C \\ &= \underline{\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C.}\end{aligned}$$

Esimerkki 5.17. Laske

$$\int 2x \sin 4x\, dx.$$

Ratkaisu: Valitaan $f'(x) = \sin 4x$ ja $g(x) = 2x$, joten $f(x) = -\frac{1}{4}\cos 4x$ ja $g'(x) = 2$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\int 2x \sin 4x \, dx &= -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot 2x - \int 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cos 4x \, dx \qquad \Big| \text{ vakion siirto} \\
&= -\frac{1}{2}\cos 4x \cdot x + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx \\
&= -\frac{1}{2}\cos 4x \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C \\
&= \underline{\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x \cdot x + C}
\end{aligned}$$

soveltamalla osittaisintegrointisääntöä.

Esimerkki 5.18. Laske

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Ratkaisu: Valitaan $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ja $g(x) = \ln x$, joten $f(x) = 2\sqrt{x}$ ja $g'(x) = \frac{1}{x}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx &= 2\sqrt{x} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} \, dx \qquad \Big| \text{ vakion siirto} \\
&= 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \\
&= 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 2 \cdot 2\sqrt{x} + C \\
&= \underline{2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2) + C}
\end{aligned}$$

soveltamalla osittaisintegrointisääntöä.

5.6 Sijoitusmenetelmä

Kolmas menetelmä, jolla lausekkeita muokataan integroinnin helpottamiseksi on *sijoitusmenetelmä*. Menetelmää kutsutaan toisinaan myös muuttujanvaihtomenetelmäksi. Menetelmän ideana on, että funktion $f(x)$ paikalle sijoitetaan uusi muuttuja t eli $f(x) = t$. Yleensä $f(x)$ on jonkin toisen funktion sisäfunktio. Sijoituksen avulla lauseke yksinkertaistuu ja on siten helpompi integroida. Integroinnin jälkeen tulee tehdä muuttujan palautus eli t:n paikalle sijoitetaan jälleen $f(x)$.

Integrointi sijoitusmenetelmällä etenee siis seuraavasti:

1. Valitaan $t = f(x)$ siten, että valinta tekee integroitavasta lausekkeesta helpomman. Usein $f(x)$:ksi kannattaa valita jonkin funktion sisäfunktio.
2. Ratkaistaan yhtälöstä $t = f(x)$ muuttuja x, eli saadaan yhtälö $x = g(t)$.
3. Derivoidaan yhtälö $x = g(t)$ puolittain, josta saadaan $dx = g'(t)\,dt$.
4. Tehdään sijoitukset $f(x) = t$, $x = g(t)$ ja $dx = g'(t)\,dt$ alkuperäiseen yhtälöön.
5. Integroidaan yhtälö t:n suhteen.
6. Tehdään muuttujan palautus $t = f(x)$.

Sijoitusmenetelmä on tälle kurssille melko vaativa asia, joten käymme sen tässä läpi vain esimerkinomaisesti. Kurssilla differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13) näihin asioihin paneudutaan syvällisemmin.

Esimerkki 5.19. Laske

$$\int \frac{x}{x^2+10}\,dx$$

käyttäen sijoitusmenetelmää.

Ratkaisu: Käytetään sijoitusta $t = x^2 + 10$, josta saadaan $x = \pm\sqrt{t-10}$. Valitaan $x = \sqrt{t-10}$, joten $dx = \frac{1}{2\sqrt{t-10}}\,dt$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+10}\,dx &= \int \frac{\sqrt{t-10}}{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-10}}\,dt \\ &= \int \frac{1}{2t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\ln|t| + C.\end{aligned}$$

Nyt tehdään muuttujan palautus eli $t = x^2 + 10$, joten

$$\frac{1}{2}\ln t + C \quad = \quad \underline{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+10\right) + C.}$$

Esimerkki 5.20. Laske

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

käyttäen sijoitusmenetelmää.

Ratkaisu: Käytetään sijoitusta $t = \sqrt{x-1}$, josta saadaan $x = t^2+1$ ja $dx = 2t\,dt$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x-1}\,dx &= \int \left(t^2+1\right)^2 t\cdot 2t\,dt && \Big|\ \text{vakion siirto}\\
&= 2\int \left(t^4+2t^2+1\right)t^2\,dt\\
&= 2\int \left(t^6+2t^4+t^2\right)dt && \Big|\ \text{summan integrointi}\\
&= 2\left(\frac{1}{7}t^7+2\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)+C\\
&= \frac{2}{7}t^7+\frac{4}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C && \Big|\ \text{lavennus}\\
&= \frac{30}{105}t^7+\frac{84}{105}t^5+\frac{70}{105}t^3+C\\
&= \frac{2}{105}t^3\left(15t^4+42t^2+35\right)+C.
\end{aligned}$$

Tehdään nyt muuttujan palautus. Koska $t = \sqrt{x-1}$, niin $t^2 = x-1$. Tällöin $t^3 = (x-1)\sqrt{x-1}$ ja edelleen $t^4 = (x-1)^2$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{105}t^3\left(15t^4+42t^2+35\right)+C\\
&\quad= \frac{2}{105}(x-1)\sqrt{x-1}\left(15(x-1)^2+42(x-1)+35\right)+C\\
&\quad= \frac{2}{105}(x-1)^{\frac{3}{2}}\left(15\left(x^2-2x+1\right)+42x-42+35\right)+C\\
&\quad= \frac{2}{105}(x-1)^{\frac{3}{2}}\left(15x^2-30x+15+42x-7\right)+C\\
&\quad= \underline{\frac{2}{105}(x-1)^{\frac{3}{2}}\left(15x^2+12x+8\right)+C.}
\end{aligned}$$

5.7 Harjoitustehtäviä

1. Mitkä seuraavista funktioista ovat funktion $f(x) = 2x^3 + \cos x + 1$ integraalifunktioita?

   a) $g(x) = 2x^4 + \sin x + x + 8$, b) $h(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + \sin x + x + 13$,

   c) $k(x) = \dfrac{1}{2}x\left(x^3 + 2\right) + \sin x + 35$.

2. Osoita, että funktio $F(x) = (-2x+3)^2$ on funktion $f(x) = 8x - 12$ integraalifunktio.

3. Määritä funktion $f(x)$ kaikki integraalifunktiot, kun

   a) $f(x) = 2x - 1$, b) $f(x) = \cos x + 2x$.

4. Määritä

   a) $\displaystyle\int 6\,dx$, b) $\displaystyle\int 2x\,dx$, c) $\displaystyle\int x^4\,dx$.

5. Laske

   a) $\displaystyle\int \left(x^2 + 1\right) dx$, b) $\displaystyle\int \left(4x^3 + \frac{1}{2}x - 1\right) dx$,

   c) $\displaystyle\int \left(2x^4 + x^2 - a\right) dx$.

6. Laske

   a) $\displaystyle\int \left(8x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right) dx$, b) $\displaystyle\int (3x+2)^2\,dx$,

   c) $\displaystyle\int \frac{15x^6 + 5x^4}{x\left(5x^3\right)}\,dx,\ x \neq 0.$

7. Laske

   a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \left(2x^{\frac{4}{3}} + 14x^2\right) dy$,

   c) $\displaystyle\int \left(x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-2} + 3\right) dx$, kun $x > 0$.

8. Laske

   a) $\displaystyle\int \left(2x + e^{2t}\right) dx$, b) $\displaystyle\int \left(2x + e^{2t}\right) dt$,

   c) $\displaystyle\int \left(2\sin x + x^2 - \cos x\right) dx$.

9. Määritä funktion $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ integraalifunktion suurin arvo, kun integraalifunktion kuvaaja kulkee origon kautta.

10. Integroi

a) $\displaystyle\int \left(\sin(2x) + 2^x\right) dx$, b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2x} + \cos(4x) + 3\right) dx$,

c) $\displaystyle\int \left(e^{-2x} + 3e^x - \cos x\right) dx$, d) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx$.

11. Määritä funktiolle $f(x)$ integraalifunktio, joka kulkee pisteen a kautta.

a) $f(x) = 3x^2 - 2,\ a = (2, 6)$, b) $f(x) = \cos(3x),\ a = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

12. Laske

a) $\displaystyle\int 4(4x-1)^2\, dx$, b) $\displaystyle\int 6(2x+3)^6\, dx$,

c) $\displaystyle\int x\left(5 - x^2\right)^3 dx$.

13. Laske

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$, kun $x > 0$, b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$, kun $x > -1$,

c) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x\, dx$.

14. Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{kun } x \geq -1 \\ 2x^2 - 3, & \text{kun } x < -1 \end{cases}$$

kaikki integraalifunktiot.

15. Tutki onko funktiolla $f(x)$ integraalifunktiota. Jos on, niin määritä funktion $f(x)$ kaikki integraalifunktiot.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} + 1, & \text{kun } x \geq 25 \\ 6, & \text{kun } x < 25, \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} e^x + 2, & \text{kun } x > 0 \\ 3x + 2, & \text{kun } x \leq 0. \end{cases}$$

16. Määritä

$$\int \frac{x-3}{x+2}\,dx,\ \ x > -1.$$

17. Jaa

$$\frac{6x-4}{x^2-2x+1},\ \ x \neq -1$$

osamurtoihin.

18. Laske

$$\int \frac{x-1}{x^2-3x}\,dx,\ \ x > 3.$$

19. Laske

$$\int \frac{2}{x\big(x^2-1\big)}\,dx,\ \ x > 1.$$

20. Määritä

$$\int x\cos x\,dx.$$

21. Määritä

$$\int 2x^2\sin x\,dx.$$

22. Määritä

$$\int x^2\ln|x|\,dx.$$

23. Integroi sijoitusmenetelmää käyttäen

$$\int \sqrt{4x-1}\,dx.$$

5.8 Harjoitustehtävien ratkaisut

1. $h(x)$ ja $k(x)$.

2.

3. a) $x^2 - x + C$, b) $\sin x + x^2 + C$.

4. a) $6x + C$, b) $x^2 + C$, c) $\frac{1}{5}x^5 + C$.

5. a) $\frac{1}{3}x^3 + x + C$, b) $x^4 + \frac{1}{4}x^2 - x + C$, c) $\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - ax + C$.

6. a) $2x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$, b) $3x^3 + 6x^2 + 4x + C$, c) $x^3 + x + C$.

7. a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$, b) $2x^{\frac{4}{3}}y + 14x^2y + C$, c) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - 6x^{-1} + 3x + C$.

8. a) $x^2 + e^{2t}x + C$, b) $2xt + \frac{1}{2}e^{2t} + C$, c) $\frac{1}{3}x^3 - 2\cos x - \sin x + C$.

9. 4.

10. a) $-\frac{1}{2}cos(2x) + \frac{2^x}{\ln 2} + C$, b) $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\sin(4x) + 3x + C$,
    c) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + 3e^x - \sin x + C$, d) $\frac{1}{3}\sin(3x) + C$.

11. a) $F(x) = x^3 - 2x + 2$, b) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{4}{3}$.

12. a) $\frac{1}{3}(4x-1)^3 + C$, b) $\frac{3}{7}(2x+3)^7 + C$, c) $-\frac{1}{8}\left(5 - x^2\right)^4 + C$.

13. a) $\frac{1}{2}\ln|x| + C$, b) $2\sqrt{x^3+1} + C$, c) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$.

14.
$$F(x) = \begin{cases} x^2 + x + C, & \text{kun } x \geq -1 \\ \frac{2}{3}x^3 - 3x - \frac{7}{3} + C, & \text{kun } x < -1. \end{cases}$$

15.
$$a)\ F(x) = \begin{cases} x^2 + x + C, & \text{kun } x \geq -1 \\ \frac{2}{3}x^3 - 3x - \frac{7}{3} + C, & \text{kun } x < -1. \end{cases}$$
    b) Ei ole.

16. $x - 5\ln|x+2| + C,\ x > -1$.

17. $\frac{6}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2},\ x \neq 1$.

18. $\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-3| + C,\ x > 3$.

19. $\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| + C,\ x > 1$.

20. $x\sin x + \cos x + C$.

21. $4x\sin x - 2\left(x^2 - 2\right)\cos x + C$.

22. $\frac{1}{3}x^3\Big(\ln|x| - \frac{1}{3}\Big) + C.$

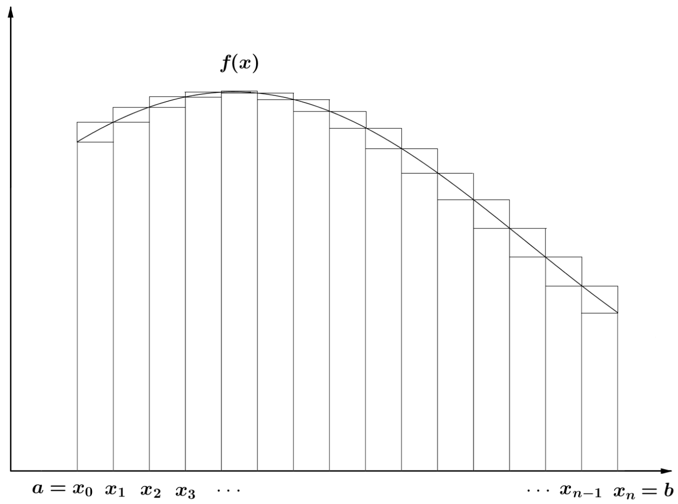
23. $\frac{1}{6}(4x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$

6 Määrätty integraali

Jo alaluvussa 4.1 todettiin, että määrätty integraali on raja-arvo, jonka avulla pystytään laskemaan muun muassa pinta-aloja ja tilavuuksia. Kuinka tämä kyseinen raja-arvo sitten pystytään määrittämään? Alaluvussa 6.1 määrittelemme määrätyn integraalin ala- ja yläsummien avulla, joka auttaa hahmottamaan, mistä integraalilaskennassa oikein on kyse. Tämän jälkeen alaluvussa 6.2 johdetaan *integraalilaskennan päälause*, ja alaluvusta 6.3 eteenpäin pääsemme soveltamaan tähän asti opittuja integraalilaskennan taitoja hieman käytännönläheisemmissä tehtävissä.

6.1 Ala- ja yläsummat

Tässä alaluvussa määrittelemme määrätyn integraalin ala- ja yläsummien avulla. Tämä määrittely perustuu siihen, että määrätty integraali koostuu äärettömän monesta äärettömän pienen tulon summasta. Rajoitumme tutkimaan tilannetta, jossa funktio f on ei-negatiivinen tutkittavalla välillä $[a, b]$ (muut tapaukset voidaan tutkia vastaavalla tavalla). Oletetaan lisäksi, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$.



Kuva 6.1: Ala- ja yläsummat.

Jaetaan väli $[a, b]$ n:ään kappeleeseen osavälejä siten, että

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Nyt saamme siis osavälit

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Merkitään välien pituuksia $\triangle x_1$, $\triangle x_2$,..., $\triangle x_n$.

Koska f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin jokaisella suljetulla välillä $[x_{i-1}, x_i]$ on olemassa minimiarvo m_i ja maksimiarvo M_i, kun $i = 1, 2, \dots, n$. Nyt saamme suorakulmiolle i minimipinta-alan $m_i \triangle x_i$ ja maksimipinta-alan $M_i \triangle x_i$. Summaamalla suorakulmioiden pinta-alat yhteen, saamme alasummaksi

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$$

ja yläsummaksi

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i.$$

Kokonaispinta-ala A on jotakin ala- ja yläsumman väliltä, joten voimme kirjoittaa

$$s_n \leq A \leq S_n.$$

Tihennetään nyt jakoa $x_0, x_1, \dots, x_n$ äärettömästi siten, että jakovälin maksimipituus lähenee nollaa. Nyt jos raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = A$$

on olemassa, on funktio f integroituva välillä $[a, b]$. Raja-arvo A on funktion f *määrätty integraali* yli välin $[a, b]$, ja sitä merkitään

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Huomautus: Välin $[a, b]$ jako tulee suorittaa siten, että jakovälin maksimipituus lähenee nollaa. Muuten ei ole väliä kuinka osaväleihin jako suoritetaan, sillä kaikilla jaoilla saadaan sama raja-arvo, kunhan n lähestyy ääretöntä funktion f ollessa integroituva.

6.2 Integraalilaskennan päälause

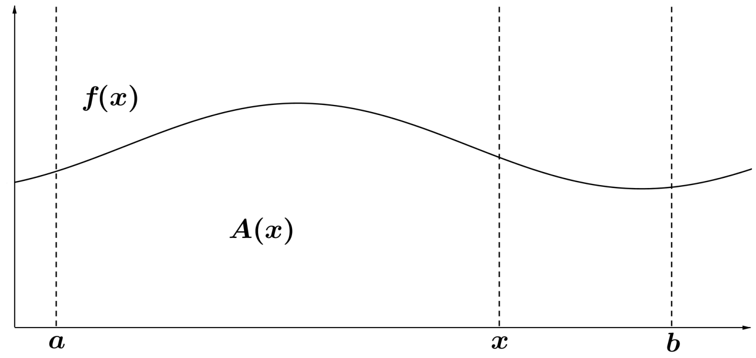
Tässä alaluvussa johdamme *integraalilaskennan päälauseen* derivaatan määritelmän avulla. Lauseen johto ei ole aivan täsmällinen, sillä oletamme esimerkiksi, että funktion $f(x)$ on oltava ei-negatiivinen, ja että suorakulmion korkeus $e \to 0$, kun $\triangle x \to 0$ (ks. kuva 6.4) problematisoimatta asiaa sen enempää. Nämä oletukset kuitenkin yksinkertaistavat tarkastelua ja ovat sen vuoksi perusteltuja kurssin vaatimustasoa silmällä pitäen.

Lause 6.1. *Integraalilaskennan päälause.* Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a),$$

missä F on funktion f integraalifunktio.

Todistus. Oheisessa kuvassa (kuva 6.2) on esitetty jatkuva ja ei-negatiivinen funktio $f(x)$. Funktion $f(x)$ ja x-akselin väliin jää alue, joka rajataan vielä y-akselin suuntaisilla suorilla pisteistä a ja x. Näin saamme alueen, jonka pinta-alan haluamme määrittää. Merkitään pinta-alafunktiota symbolilla A. Koska sen arvo riippuu muuttujasta x, saamme pinta-alafunktioksi $A(x)$.

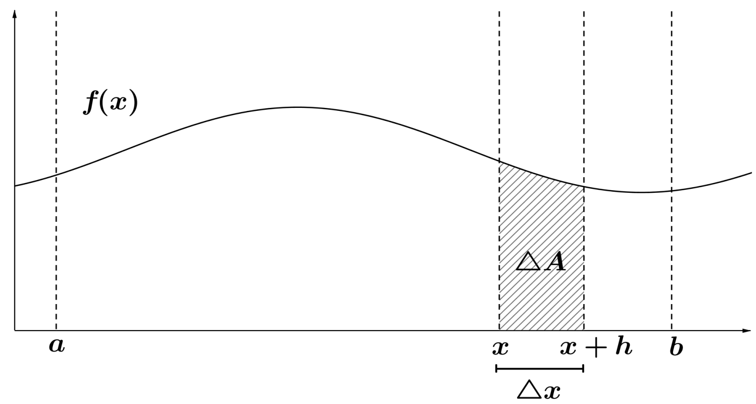


Kuva 6.2: Pinta-alafunktio $A(x)$.

Lasketaan seuraavaksi funktion $A(x)$ derivaatta $A'(x)$ derivaatan määritelmän avulla.

Olkoon $h = \triangle x$ $(h > 0)$, jolloin vastaava pinta-alafunktion muutos (kuva 6.3) on $\triangle A$. Tarkastellaan nyt funktion $A(x)$ ja muuttujan x muutosten suhdetta $\frac{\triangle A}{\triangle x}$. Nyt kun $h \to 0$, niin derivaatan määritelmän avulla saadaan

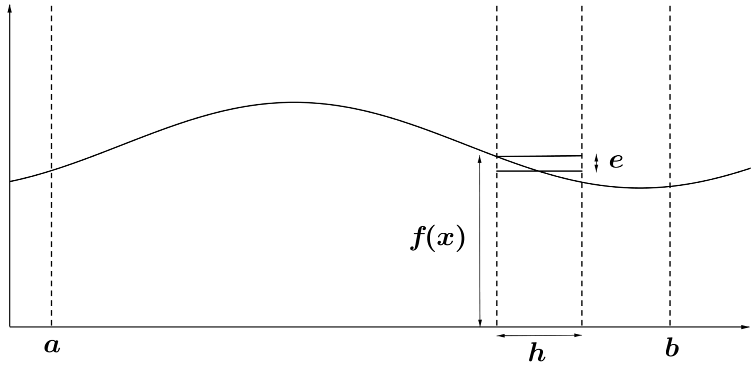
$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\triangle A}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\triangle A}{\triangle x}.$$



Kuva 6.3: Pinta-alafunktion muutos.

Piirretään nyt pisteeseen $\big(x, f(x)\big)$ vaakasuora viiva aina pystyviivalle $x + h$

asti. Nyt saimme muodostettua suorakulmion, jonka ala $h \cdot f(x) > \triangle A$.[1] Muodostetaan nyt toinen suorakulmio, jonka leveys on h ja korkeus e siten, että $h \cdot f(x) - h \cdot e = \triangle A$ (kuva 6.4).



Kuva 6.4: Suorakulmion muodostus.

Nyt saamme erotusosamääräksi

$$\frac{\triangle A}{h} = \frac{h \cdot f(x) - h \cdot e}{h} = f(x) - e.$$

Asetetaan jälleen $h \to 0$. Tällöin $\triangle A$ lähestyy nollaa, joten voidaan myös todeta, että $e \to 0$. Näin ollen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\triangle A}{h} = A'(x)$$

ja toisaalta

$$\lim_{h \to 0} \frac{\triangle A}{h} = \lim_{e \to 0} \frac{h \cdot f(x) - h \cdot e}{h} = \lim_{e \to 0} (f(x) - e) = f(x).$$

Siis $A'(x) = f(x)$.

Saimme siis tuloksen joka kertoo, että pisteessä x pinta-alafunktion derivaatta $A'(x)$ ja funktio $f(x)$ saavat saman arvon. Tällöin siis funktion $f(x)$ pinta-alafunktio $A(x)$ on sama kuin funktion $f(x)$ integraalifunktio $F(x)$, eli $A(x)$ on jokin integraalin $\int f(x)\,dx$ funktioista. Toisin sanoin

$$A(x) = F(x) + C.$$

Olemme siis laskemassa lukuarvoa pinta-alalle, joka riippuu muuttujasta x. Mikä on integrointivakion C arvo?

[1] Tarkalleen ottaen tämä pitää paikkaansa, kun funktio $f(x)$ on vähenevä tarkasteluvälillä. Jos funktio $f(x)$ on kasvava, niin silloin $h \cdot f(x) < \triangle A$. Tällöin $\triangle A = h \cdot f(x) + h \cdot e$, joka johtaa samaan tulokseen.

Selvästi $A(a) = 0$, sillä kun $x = a$, niin y-akselin suuntaiset pinta-alaa rajoittavat suorat ovat päällekkäin. Siis

$$0 = A(a) = F(a) + C,$$

josta saamme

$$C = -F(a).$$

Näin ollen

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

ja erityisesti

$$A(b) = F(b) - F(a).$$

□

Yllä oleva lause yhdistää määrätyn integraalin ja integraalifunktion käsitteet toisiinsa. Lause on siinä mielessä kätevä, että sen avulla määrätty integraali on hyvin helppo määrittää, eikä lausetta käytettäessä tarvitse minkäänlaista raja-arvon laskentaa. Tosin joissain tapauksissa integraalifunktion määritys voi olla hyvin vaikeaa, jolloin määrätyn integraalin laskeminenkin vaikeutuu.

Huomaa myös, että kyseisen lauseen todistusta tarkasteltiin tilanteessa, jossa funktio f oli ei-negatiivinen. Lause pätee myös tilanteissa, joissa funktio f on negatiivinen. Jos määrätyn integraalin arvo on negatiivinen, niin pinta-alaa laskettaessa on muistettava vaihtaa etumerkkiä, sillä pinta-ala ei voi saada negatiivista arvoa (määrätty integraali toki voi). Tilanteissa, joissa funktio on välillä positiivinen ja välillä negatiivinen, kannattaa pinta-alaa laskettaessa tarkastelu jakaa osiin kaavan (6.5) avulla, jota käsitellään myöhemmin alaluvussa 6.3.

Integroimisrajat tulee säilyttää laskutoimituksessa mukana vielä integroinnin jälkeenkin. Otetaan siksi käyttöön uusi merkintä, joka kertoo integroimisrajat integroinnin jälkeen.

Määritelmä 6.1. *Sijoitusmerkintä:*

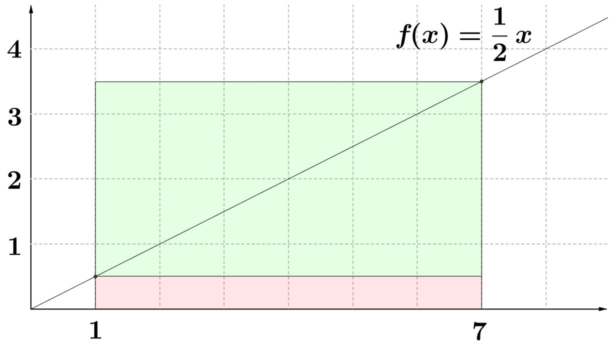
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{\!a}^{\,b} F(x) = F(b) - F(a),$$

missä $F(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio.

Esimerkki 6.1. Arvioi funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$ kuvaajan, x-akselin sekä suorien $x = 1$ ja $x = 7$ rajaaman alueen pinta-alaa ala- ja yläsummien avulla. Laske ala- ja yläsummat, kun väli $[1, 7]$ jaetaan a) yhteen, b) kolmeen yhtäpitkään osaväliin.

Ratkaisu: a) Arvioidaan pinta-alaa ala- ja yläsummilla s_1 ja S_1:

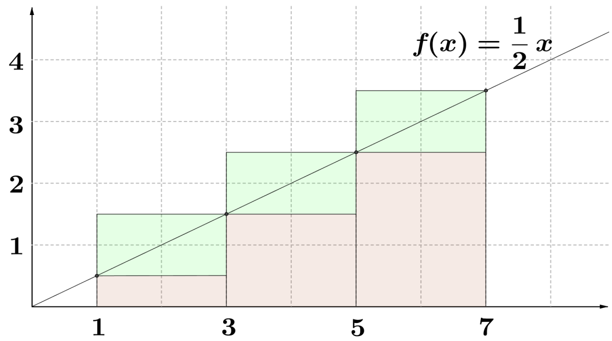
$$s_1 = f(1) \cdot 6 = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3 \quad \text{ja } S_1 = f(7) \cdot 6 = \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21.$$



Kuva 6.5: Ala- ja yläsummat a-kohdassa.

Siis $\underline{3 < A < 21}$.

b) Arvioidaan pinta-alaa ala- ja yläsummilla s_3 ja S_3:



Kuva 6.6: Ala- ja yläsummat b-kohdassa.

$s_3 = f(1) \cdot 2 + f(3) \cdot 2 + f(5) \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 9 \quad$ ja

$S_3 = f(3) \cdot 2 + f(5) \cdot 2 + f(7) \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 = 15.$

Siis $\underline{9 < A < 15}$.

Kuten edellisestä esimerkistä huomataan, jakoa tihentämällä arvio pinta-alalle on tarkempi, sillä alasumma kasvaa ja yläsumma pienenee. Kun välijakoa tihennetään äärettömästi, saadaan pinta-alalle tarkka arvo.

Esimerkissä 6.1 pinta-alan tarkka arvo välillä $[1, 7]$ on

$$\int_1^7 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \Big/_1^7 \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}\left(7^2 - 1^2\right) = 12.$$

6.3 Määrätyn integraalin laskusääntöjä

Seuraavaksi laajennetaan määrätyn integraalin käsitettä laskusääntöjen avulla. Nämä laskusäännöt ovat samat kuin määräämättömällä integraalilla muutamia lisäyksiä lukuunottamatta. Tässä on kuitenkin hyvä pitää mielessä, että määräämätön integraali on derivoinnin käänteisoperaatio ja määrätty integraali on puolestaan raja-arvo.

Määritelmä 6.2. [16, Sivu 246].

(6.1) $$\int_a^a f(x)\ dx = 0,$$ tyhjä integroimisväli,

(6.2) $$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx,$$ integroimisrajojen vaihto.

Yllä olevasta määritelmästä huomataan, että integroimisrajojen vaihto on sallittua. Jos näin tehdään, on kuitenkin aina muistettava vaihtaa etumerkki. Ilman etumerkin vaihtoa määrätyn integraalin arvo olisi virheellinen.

Otetaan esille vielä muutama laskusääntö ja tarkastellaan näiden käyttöä sitten esimerkkien avulla.

Lause 6.2. [16, Sivu 247].

(6.3) $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,\ \text{missä k on vakio,}$$ vakion siirto,

(6.4) $$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$ summan integrointi,

(6.5) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$ additiivisuus.

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 6.2. Olkoon

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 8 \quad \text{ja} \quad \int_1^4 g(x)\,dx = 3.$$

Laske

$$\text{a)} \int_1^4 12f(x)\,dx, \qquad\qquad \text{b)} \int_4^1 \Big(2g(x) - 3f(x)\Big)\,dx.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \qquad & \int_1^4 12f(x)\,dx && \Big|\ \text{vakion siirto} \\
& = 12\int_1^4 f(x)\,dx && \Big|\ \int_1^4 f(x)\,dx = 8 \\
& = 12 \cdot 8 \\
& = \underline{96},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \qquad & \int_4^1 \Big(2g(x) - 3f(x)\Big)\,dx && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
& = \int_4^1 2g(x)\,dx - \int_4^1 3f(x)\,dx && \Big|\ \text{vakion siirto} \\
& = 2\int_4^1 g(x)\,dx - 3\int_4^1 f(x)\,dx && \Big|\ \text{integroimisrajojen vaihto} \\
& = -2\int_1^4 g(x)\,dx + 3\int_1^4 f(x)\,dx && \Big|\ \int_1^4 g(x)\,dx = 3, \int_1^4 f(x)\,dx = 8 \\
& = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 \\
& = -6 + 24 \\
& = \underline{18}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.3. Laske määrätty integraali

$$\int_3^4 \Big(x^2 - 1\Big)\,dx - \int_2^4 \Big(1 - x^2\Big)\,dx + \int_2^3 \Big(x^2 - 1\Big)\,dx.$$

Ratkaisu:

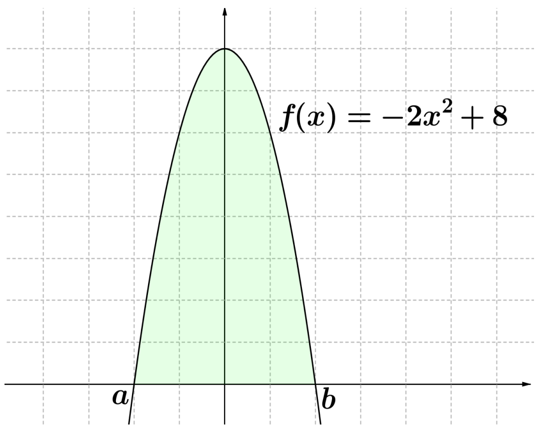
$$\begin{aligned}
&\int_3^4 \left(x^2-1\right) dx - \int_2^4 \left(1-x^2\right) dx + \int_2^3 \left(x^2-1\right) dx && \Big| \text{ integroimisrajojen vaihto} \\
&= \int_3^4 \left(x^2-1\right) dx + \int_4^2 \left(x^2-1\right) dx + \int_2^3 \left(x^2-1\right) dx && \Big| \text{ additiivisuus} \\
&= \int_2^4 \left(x^2-1\right) dx + \int_4^2 \left(x^2-1\right) dx && \Big| \text{ additiivisuus} \\
&= \int_2^2 \left(x^2-1\right) dx && \Big| \text{ tyhjä integroimisväli} \\
&= \underline{0}.
\end{aligned}$$

6.4 Pinta-ala

Aiemmin muun muassa geometrian kurssilla olemme laskeneet erilaisten kappaleiden pinta-aloja. Näiden pinta-alojen määritys on usein ollut helppoa, koska kappaleet ovat koostuneet kolmioista, ympyröistä ja muista säännöllisistä kuvioista. Miten sitten voidaan määrittää sellaisen kappaleen pinta-ala, joka on hyvin epäsäännöllinen ja mielivaltainen? Tähän ongelmaan määrätty integraali ja eritoten lauseessa 6.1 esitetty integraalilaskennan päälause tuovat ratkaisun.

Esimerkki 6.4. Laske funktion $f(x) = -2x^2 + 8$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu:



Selvitetään ensin integroimisrajat, jotka saadaan x-akselin ja funktion $f(x)$ kuvaajan leikkauspisteistä:

$$
\begin{aligned}
-2x^2+8=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2=8 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2=4 \\
&\Leftrightarrow \quad x=\pm 2.
\end{aligned}
$$

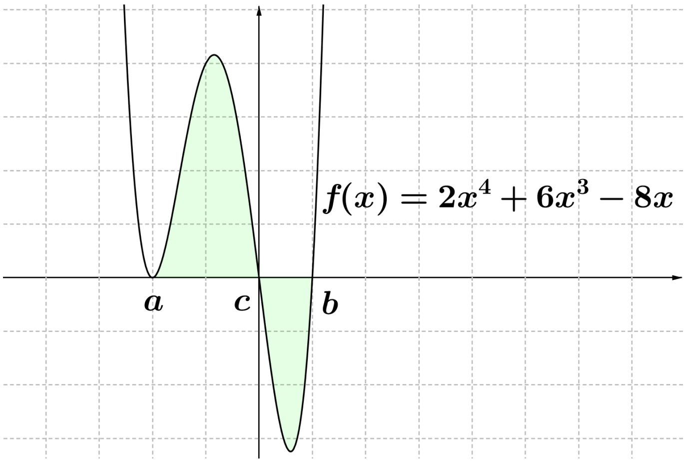
Lasketaan nyt pinta-ala soveltamalla lausetta 6.1. Koska kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli, niin

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} \Big(-2x^2+8\Big)\,dx && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \int_{-2}^{2} -2x^2\,dx + \int_{-2}^{2} 8\,dx && \Big|\ \text{vakion siirto} \\
&= -2\int_{-2}^{2} x^2\,dx + 8\int_{-2}^{2} 1\,dx \\
&= -2 \Big/_{\!-2}^{\,2} \frac{1}{3}x^3 + 8 \Big/_{\!-2}^{\,2} x \\
&= -2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3\right)\right) + 8\cdot(2-(-2)) \\
&= -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} + 16 + 16 \\
&= \underline{21\frac{1}{3}\ \text{pinta-alayksikköä}}.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 6.5. Laske funktion $f(x)=2x^4+6x^3-8x$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu: Selvitetään ensin integroimisrajat, jotka saadaan x-akselin ja funktion $f(x)$ kuvaajan leikkauspisteistä. Siis

$$
\begin{aligned}
2x^4+6x^3-8x=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(x^3+3x^2-4)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x=0 \text{ tai } x^3+3x^2-4=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x=0 \text{ tai } x^3+3x^2-4=0.
\end{aligned}
$$



Kuva 6.7: Esimerkin 6.5 funktio.

Kokeilemalla huomataan, että yhtälön $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ yksi juuri on $x = 1$. Nyt yhtälö saadaan muotoon $(x-1)(x^2+4x+4) = 0$ käyttämällä jakokulmaa.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttämällä yhtälön $x^2+4x+4 = 0$ juureksi saadaan kaksoisjuuri $x = -2$.

Funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteet ovat siis $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 1$. Kuvassa 6.7 ne ovat $a = -2$, $b = 1$ ja $c = 0$.

Jaetaan tarkastelu ensin osiin kaavan (6.5) avulla.

$$\int_a^b \left(2x^4 + 6x^3 - 8x\right) dx \qquad \Big| \text{ additiivisuus}$$

$$= \int_a^c \left(2x^4 + 6x^3 - 8x\right) dx + \int_c^b \left(2x^4 + 6x^3 - 8x\right) dx.$$

Vaihdetaan vielä jälkimmäisen integraalin etumerkki ja lasketaan sitten kysytty pinta-ala. Etumerkin vaihto täytyy tehdä, jotta pinta-alasta saadaan positiivinen (alue välillä $[0, 1]$ on x-akselin alla).

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^c \left(2x^4 + 6x^3 - 8x\right) dx - \int_c^b \left(2x^4 + 6x^3 - 8x\right) dx \\
&= \int_{-2}^0 \left(2x^4 + 6x^3 - 8x\right) dx - \int_0^1 \left(2x^4 + 6x^3 - 8x\right) dx \qquad \Big| \text{ sum. int.} \\
&= \Big/_{\!\!-2}^{\,0} \left(\frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - 4x^2\right) - \Big/_{\!\!0}^{\,1} \left(\frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - 4x^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{5}\cdot 0^5 + \frac{3}{2}\cdot 0^4 - 4\cdot 0^2 - \left(\frac{2}{5}\cdot(-2)^5 + \frac{3}{2}\cdot(-2)^4 - 4\cdot(-2)^2\right) \\
&\quad - \left[\frac{2}{5}\cdot 1^5 + \frac{3}{2}\cdot 1^4 - 4\cdot 1^2 - \left(\frac{2}{5}\cdot 0^5 + \frac{3}{2}\cdot 0^4 - 4\cdot 0^2\right)\right] \\
&= -\left(\frac{2}{5}\cdot(-32) + \frac{3}{2}\cdot 16 - 4\cdot 4\right) - \left[\frac{2}{5}\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot 1 - 4\cdot 1\right] \\
&= \frac{64}{5} - 24 + 16 - \frac{2}{5} - \frac{3}{2} + 4 \\
&= \frac{62}{5} - \frac{3}{2} - 4 \\
&= \underline{6\frac{9}{10} \text{ pinta-alayksikköä.}}
\end{aligned}
$$

Yllä olevissa esimerkeissä laskimme x-akselin ja funktion kuvaajan rajaaman alueen pinta-alaa. Mitä jos haluamme laskea kahden funktion kuvaajan rajaaman alueen pinta-alan? Tarkastellaan tätä ongelmaa seuraavan esimerkin avulla.

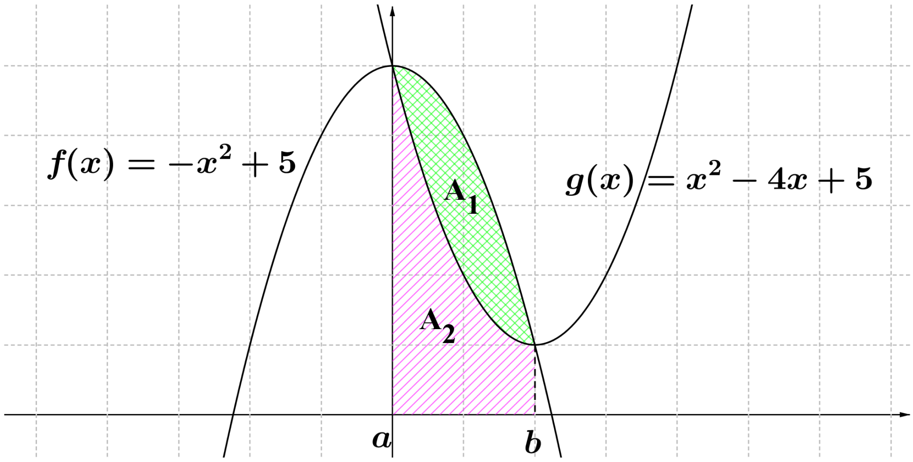
Esimerkki 6.6. Laske funktioiden $f(x) = -x^2 + 5$ ja $g(x) = x^2 - 4x + 5x$ kuvaajien rajaaman alueen pinta-ala (kuvassa 6.8 pinta-ala A_1).

Ratkaisu: Selvitetään ensin integroimisrajat, jotka saadaan funktioiden kuvaajien leikkauspisteistä. Siis

$$
\begin{aligned}
-x^2 + 5 = x^2 - 4x + 5 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x(x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = 2.
\end{aligned}
$$

Periaatteena kahden funktion kuvaajan rajaaman alan laskennassa on se, että lasketaan ensin molempien funktioiden kuvaajien rajaamat alat x-akselin kanssa tarkasteluvälillä ja vähennetään sitten ne toisistaan siten, että saadaan haluttu ala selville.

Tässä esimerkissä tarkasteluväli on $[0, 2]$. Kuvasta 6.8 nähdään, että funktion $f(x)$ kuvaaja rajaa suuremman alueen x-akselin kanssa $(A_1 + A_2)$, joten haluttu pinta-ala saadaan vähentämällä $g(x)$:n kuvaajan ja x-akselin välinen ala (A_2)



Kuva 6.8: Esimerkin 6.6 pinta-alat.

funktion $f(x)$ kuvaajan rajaamasta alasta. Näin ollen

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx \\
&= \int_0^2 \Big(-x^2 + 5 - \big(x^2 - 4x + 5\big)\Big)\,dx \\
&= \int_0^2 \Big(-2x^2 + 4x\Big)\,dx && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \Big/_0^2 \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right) \\
&= -\frac{2}{3}\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - \left(-\frac{2}{3}\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2\right) \\
&= -\frac{16}{3} + 8 \\
&= \underline{2\frac{2}{3}\ \text{pinta-alayksikköä}}.
\end{aligned}$$

Edellisessä esimerkissä huomattiin, että kahden funktion kuvaajan rajaama pinta-ala saadaan laskemalla ensin molempien funktioiden kuvaajien rajaamat alat x-akselin kanssa ja vähentämällä sitten saadut alat toisistaan siten, että haluttu pinta-ala saadaan selville. Toisaalta on oltava tarkkana kumpi ala vähennetään kummasta. Jos vähennys tehdään väärinpäin, tulee alasta negatiivinen. Tällöin voimme kuitenkin aina ottaa itseisarvon saadusta luvusta ja saamme halutun pinta-alan. Kirjoitetaan tämä vielä lauseen muodossa:

Lause 6.3. Funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajien sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman alueen pinta-ala on

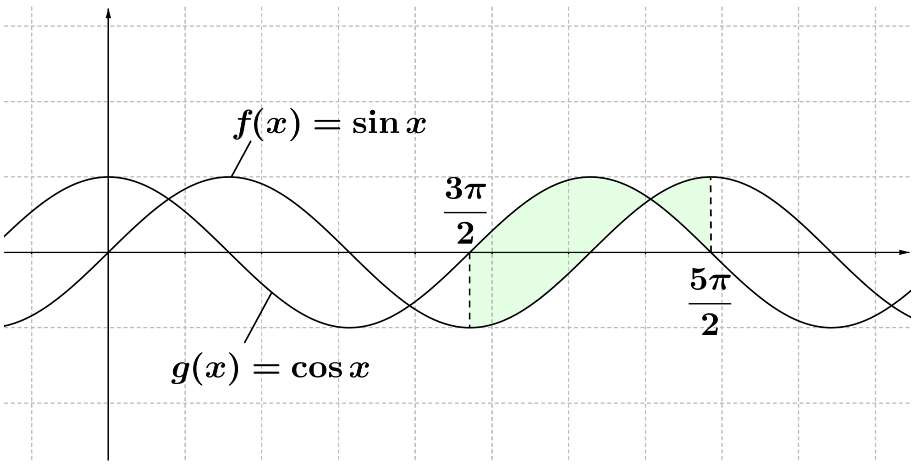
$$A = \int_a^b dA = \int_a^b \Big| f(x) - g(x) \Big| \, dx.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Käytännössä on kuitenkin helpompaa ajatella asiaa kuvan avulla ja katsoa kumpi kuvaajista on ylempänä ja kumpi alempana, eikä tällöin itseisarvoja tarvitse käyttää. Jos kuvaajat risteävät tarkasteluvälillä, kannattaa tarkastelu jakaa osaväleihin.

Esimerkki 6.7. Laske funktioiden $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ kuvaajien sekä suorien $x = \frac{3\pi}{2}$ ja $x = \frac{5\pi}{2}$ rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu:



Selvitetään funktioiden kuvaajien leikkauspiste välillä $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ ja jaetaan sitten tarkastelu osiin. Leikkauspiste on

$$\begin{aligned}
\sin x = \cos x \quad &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x && \Big| \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pm x + n \cdot 2\pi \\
&\Leftrightarrow \; -2x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2} = n \cdot 2\pi
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad \text{tai} \quad \text{ei ratkaisua}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9\pi}{4},$$

välillä $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, kun $n \in \mathbb{Z}$. Nyt jakamalla tarkastelu osiin saadaan

$$A = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{4}} \Big(g(x) - f(x)\Big)\,dx + \int_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{2}} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx \qquad \Big|\ \text{sum. int.}$$

$$= \Big/_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{4}} (\sin x - (-\cos x))\,dx + \Big/_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{2}} (-\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= \sin\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{9\pi}{4} - \left(\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\frac{5\pi}{2} - \sin\frac{5\pi}{2}$$

$$- \left(-\cos\frac{9\pi}{4} - \sin\frac{9\pi}{4}\right)$$

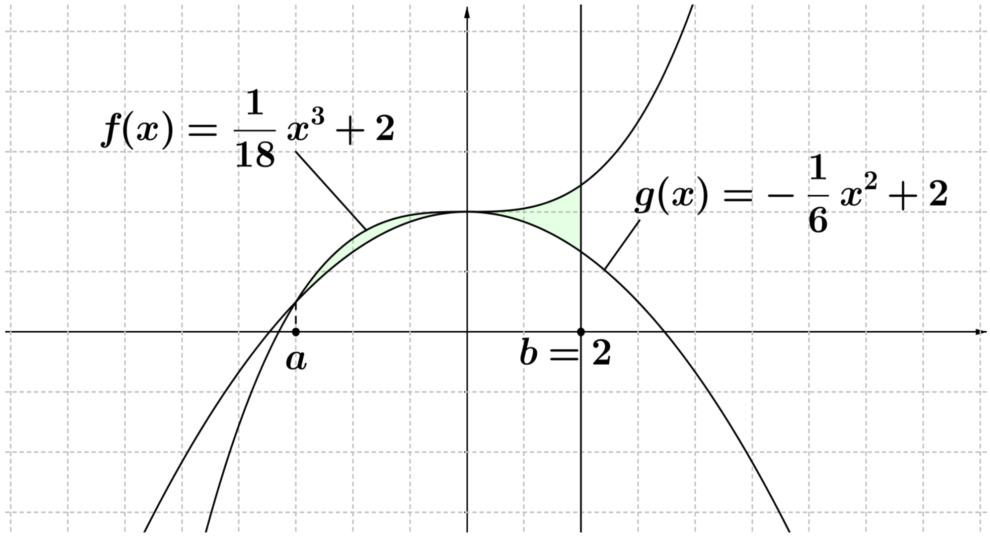
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 0 - 0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \underline{2\sqrt{2}\ \text{pinta-alayksikköä}}.$$

Huomaa, että yllä olevassa tarkastelussa ensimmäisellä välillä funktion $g(x)$ kuvaaja on $f(x)$:n kuvaajan yläpuolella, mutta toisessa alapuolella. Sen vuoksi ensimmäisellä välillä laskimme $g(x) - f(x)$ ja toisella $f(x) - g(x)$. Tämän asian kanssa kannattaa olla tarkkana, sillä vähentämällä molemmilla väleillä funktioiden kuvaajat samoinpäin saadaan virheellinen lopputulos. Jos funktioiden kuvaajat olisivat koko tarkasteluvälillä samoinpäin, ei laskentaa tarvitsisi välttämättä jakaa osiin.

Esimerkki 6.8. Laske funktioiden $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + 2$ ja $g(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 2$ kuvaajien sekä suoran $x = 2$ rajaaman kaksiosaisen alueen pinta-ala.

Ratkaisu: Selvitetään ensin funktioiden kuvaajien leikkauspisteet.



Leikkauspisteet ovat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{18}x^3 + 2 = -\frac{1}{6}x^2 + 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x^3 = -x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -3.
\end{aligned}$$

Lasketaan nyt kysytty pinta-ala. Huomaa, että nyt tarkastelua ei tarvitse jakaa osiin, koska funktioiden kuvaajat ovat välillä $[-3, 2]$ koko ajan samoinpäin.

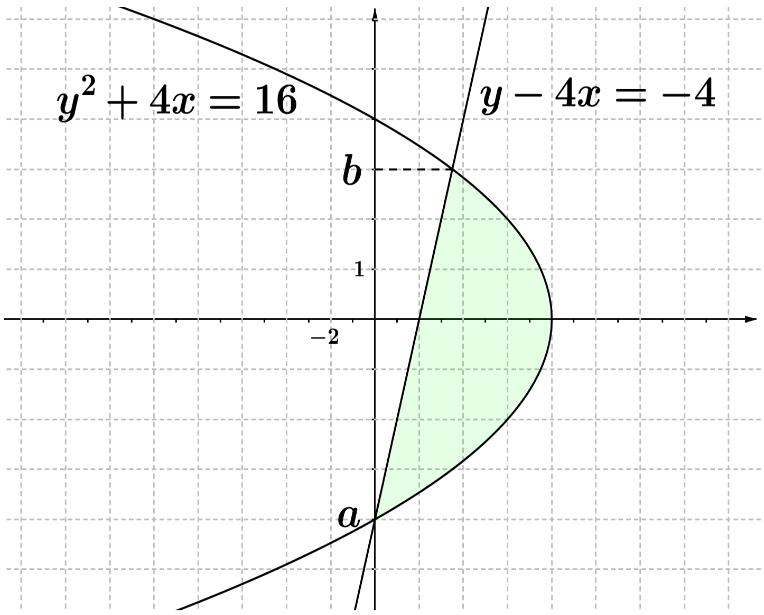
$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{2} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx \\
&= \int_{-3}^{2} \left[\frac{1}{18}x^3 + 2 - \left(-\frac{1}{6}x^2 + 2\right)\right] dx \\
&= \int_{-3}^{2} \left(\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{6}x^2\right) dx && \Big| \text{ summan integrointi} \\
&= \Big/_{-3}^{2} \left(\frac{1}{72}x^4 + \frac{1}{18}x^3\right) \\
&= \frac{1}{72}\cdot 2^4 + \frac{1}{18}\cdot 2^3 - \left(\frac{1}{72}(-3)^4 + \frac{1}{18}(-3)^3\right) \\
&= \frac{16}{72} + \frac{8}{18} - \frac{81}{72} + \frac{27}{18}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{65}{72} + \frac{140}{72}$$

$$= \underline{1\frac{1}{24} \text{ pinta-alayksikköä.}}$$

Nyt olemme laskeneet x-akselin ja funktion kuvaajan sekä kahden funktion kuvaajan rajaamia pinta-aloja. Tutustutaan sitten tilanteisiin, joissa täytyy määrittää funktion kuvaajan ja y-akselin rajaamia pinta-aloja. Näissä tilanteissa integrointi suoritetaan samoin kuin aiemmin. Ainoana erona on se, että nyt integrointi tulee suorittaa muuttujan y suhteen.

Esimerkki 6.9. Laske funktion $y^2 + 4x = 16$ kuvaajan ja suoran $y - 4x = -4$ rajaaman alueen pinta-ala.



Ratkaisu: Ratkastaan ensin yhtälöt muuttujan x suhteen. Funktion yhtälö saa muodon

$$y^2 + 4x = 16 \Leftrightarrow 4x = 16 - y^2$$

$$\Leftrightarrow x = 4 - \frac{1}{4}y^2$$

ja suoran yhtälö muodon

$$y - 4x = -4 \Leftrightarrow 4x = y + 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y + 1.$$

Selvitetään sitten leikkauspisteiden y-koordinaatit. Muodostetaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{4}y^2, \\ x = \frac{1}{4}y + 1, \end{cases}$$

josta saadaan

$$4 - \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}y + 1$$

ja edelleen

$$\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y - 3 = 0.$$

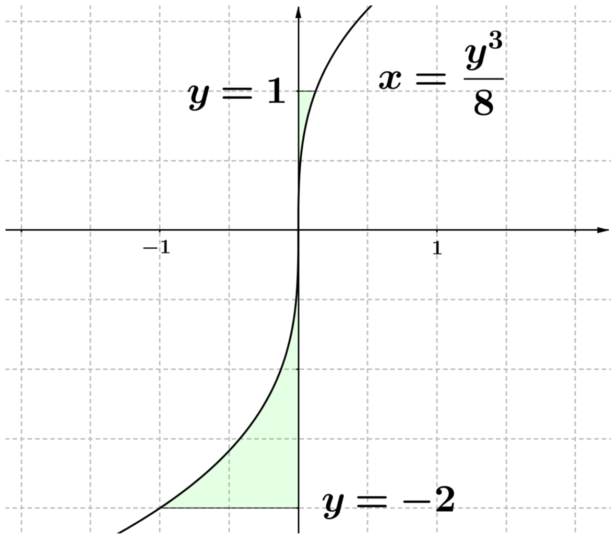
Käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, saamme juuriksi $y = 3$ ja $y = -4$.

Lasketaan nyt kysytty pinta-ala. Huomaa, että nyt tarkastelua ei tarvitse jakaa osiin, koska funktioiden kuvaajat ovat välillä $[-4, 3]$ koko ajan samoinpäin.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{3} \Big(f(y) - g(y)\Big)\, dy \\
&= \int_{-4}^{3} \left[-\frac{1}{4}y^2 + 4 - \left(\frac{1}{4}y + 1\right)\right] dy \\
&= \int_{-4}^{3} \left(-\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y + 3\right) dy && \Big| \text{ sum. int.} \\
&= \Big/_{\!\!-4}^{3} \left(-\frac{1}{12}y^3 - \frac{1}{8}y^2 + 3y\right) \\
&= -\frac{1}{12} \cdot 3^3 - \frac{1}{8} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \left(-\frac{1}{12}(-4)^3 - \frac{1}{8}(-4)^2 + 3 \cdot (-4)\right) \\
&= -\frac{27}{12} - \frac{9}{8} + 9 - \frac{64}{12} + 2 + 12 \\
&= -\frac{91}{12} - \frac{9}{8} + 23 \\
&= \underline{14\frac{7}{24} \text{ pinta-alayksikköä.}}
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.10. Määritä funktion $x = \frac{y^3}{8}$ kuvaajan ja suorien $y = 1$ ja $y = -2$ rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu: Integrointirajat ovat siis $y = 1$ ja $y = -2$. Lasketaan kysytty pinta-ala jakamalla tarkastelu osiin.

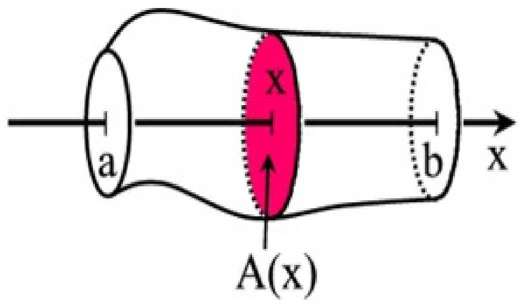


$$
\begin{aligned}
A &= -\int_{-2}^{0} \frac{1}{8}y^3\,dy + \int_{0}^{1} \frac{1}{8}y^3\,dy && \Big|\ \text{vakion siirto} \\
&= -\frac{1}{8}\int_{-2}^{0} y^3\,dy + \frac{1}{8}\int_{0}^{1} y^3\,dy \\
&= -\frac{1}{8}\Big/_{-2}^{0} \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{8}\Big/_{0}^{1} \frac{1}{4}y^4 \\
&= -\frac{1}{32}\Big(0^4 - (-2)^4\Big) + \frac{1}{32}\Big((1^4 - 0^4)\Big) \\
&= -\frac{1}{32}\cdot(-16) + \frac{1}{32}\cdot 1 \\
&= \underline{\frac{17}{32}\ \text{pinta-alayksikköä.}}
\end{aligned}
$$

6.5 Tilavuus

Nyt kun olemme tutustuneet pinta-alojen määrittämiseen, on aika ryhtyä laskemaan tilavuuksia. Pinta-aloja laskettaessa ajattelimme, että pinta-ala koostuu äärettömän monesta äärettömän pienestä suorakaiteesta, jotka yhteenlaskettuna muodostavat pinta-alan. Nyt ajattelemme aivan samalla tavalla. Tilavuus koostuu siis äärettömän monesta äärettömän ohuesta tilavuusalkiosta, jotka yhteenlaskettuna muodostavat laskettavan tilavuuden.

Ajatellaan ensin, että meillä on jokin sylinterimäinen tilavuus V, jonka poikkileikkaus säilyy vakiona. Poikkileikkauspinta on sylinterin akselia vastaan kohtisuorassa ja sen pinta-ala olkoon A. Sylinterin tilavuus on nyt helppo määrittää. Se on pohjan pinta-ala kertaa sylinterin korkeus h eli $V = A \cdot h$, kun poikkileikkaus säilyy vakiona. Mitä jos poikkileikkauspinta ei olekkaan vakio, vaan vaihtelee akselin muuttujan suhteen?



Kuva 6.9: Poikkileikkaus ei pysy vakiona (lähde: www.taulukot.com).

Nyt tarvitsemme avuksi taas integraalilaskentaa. Olkoon x-akseli tarkasteluakseli ja oletetaan, että tilavuutta rajoittavat x-akselia vastaan kohtisuorat tasot a ja b. Poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, sillä nyt se ei ole vakio, vaan riippuu muuttujasta x. Nyt voimme kirjoittaa kappaleen tilavuudelle V yhtälön

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx,$$

missä $A(x)$ on poikkileikkauksen pinta-ala ja dx on tilavuusalkion paksuus.

Voimme siis todeta, että kappaleen tilavuus on keskimääräinen poikkileikkauspinta-ala A_k kerrottuna tarkasteluvälillä, eli

$$V = A_k \cdot (b - a).$$

Tutustutaan ensin pyörähdyskappaleen tilavuuden määrittämiseen ja sen jälkeen tilavuuksiin, joiden tilavuusalkio ei ole ympyrälieriön muotoinen. Pyörähdyskappaleella tarkoitetaan sitä, kun jatkuvan funktion kuvaaja pyörähtää jonkin akselin ympäri muodostaen pinnan, joka yhdessä pyörähdysakselia vastaan kohtisuorien tasojen a ja b kanssa muodostaa tilavuuden. Tällöin tilavuusalkiot ovat ympyrälieriön muotoisia.

6.5.1 Pyörähdyskappale

Monesti tilavuuden määrittämisessä suurin työ on löytää poikkileikkauksen pinta-alafunktio $A(x)$. Pöyrähdyskappaleen tapauksessa se on kuitenkin helppoa. Pyörähdyskappaleen tilavuusalkiot ovat ympyrälieriön muotoisia, joten voimme kirjoittaa tilavuudelle yhtälön

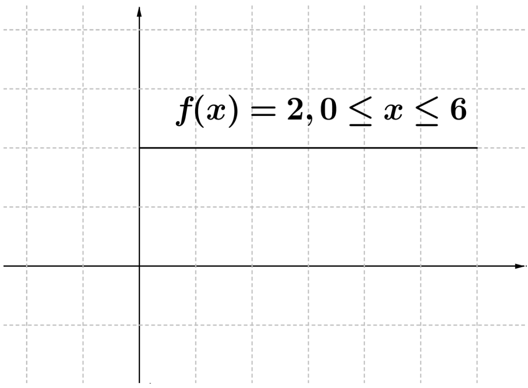
$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$$

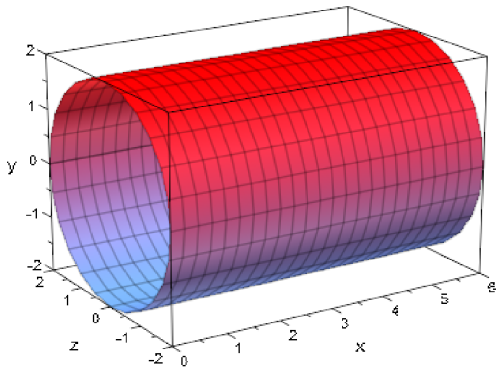
olettaen, että pyörähdysakselina on x-akseli. Yhtälö voidaan kirjoittaa samaan tapaan myös muiden akselien tapauksessa.

Huomaa, että yllä olevassa yhtälössä pinta-alafunktio on saatu hyväksikäyttäen ympyrän pinta-alan kaavaa πr^2, missä ympyrän säteenä r on nyt funktio $f(x)$. Tällöin pinta-alafunktioksi saadaan $A(x) = \pi f(x)^2$.

Esimerkki 6.11. Suora $f(y) = 2$, $0 \leq x \leq 6$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen ympyrälieriön tilavuus.

Ratkaisu: Integrointirajat ovat siis $x = 0$ ja $x = 6$.





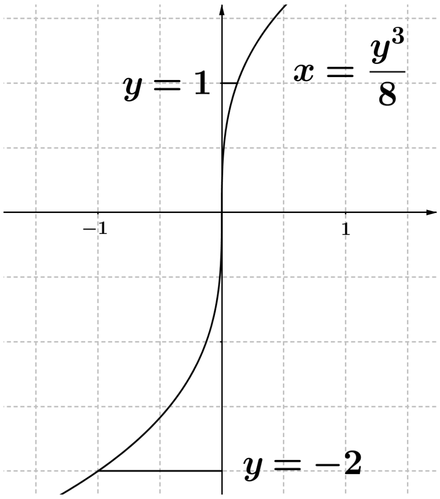
Kysytty tilavuus

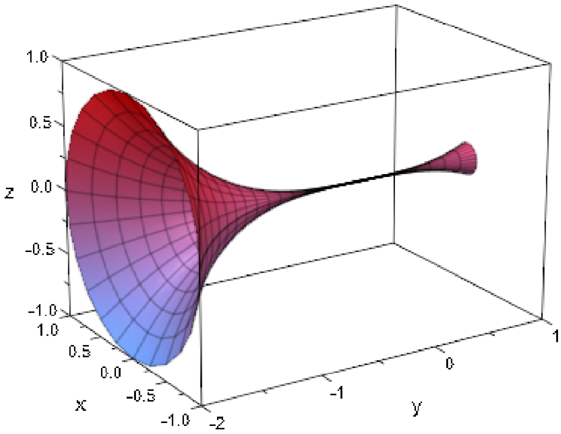
$$V = \int_0^6 \pi \cdot 2^2 \, dx = 4\pi \Big/_0^6 x = 4\pi(6 - 0) = \underline{24\pi \text{ tilavuusyksikköä}}.$$

Huomaa, että tehtävä olisi voitu myös ratkaista suoraan käyttämällä suoran ympyrälieriön tilavuuden kaavaa $V = \pi r^2 h$.

Esimerkki 6.12. Funktion $f(y) = \frac{y^3}{8}$, $-2 \leq y \leq 1$, kuvaaja pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyvän kaksiosaisen kappaleen tilavuus (vrt. esimerkki 6.10).

Ratkaisu: Integrointirajat ovat siis $y = 1$ ja $y = -2$. Lasketaan kysytty tilavuus jakamalla tarkatelu osiin:





$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{0} \pi \left(\frac{1}{8}y^3\right)^2 dy + \int_{0}^{1} \pi \left(\frac{1}{8}y^3\right)^2 dy \\
&= \frac{\pi}{64} \Big/_{-2}^{0} \frac{1}{7}y^7 + \frac{\pi}{64} \Big/_{0}^{1} \frac{1}{7}y^7 \\
&= \frac{\pi}{448}\Big(0^7 - (-2)^7 + (1^7 - 0^7)\Big) \\
&= \underline{\frac{129\pi}{448} \text{ tilavuusyksikköä.}}
\end{aligned}
$$

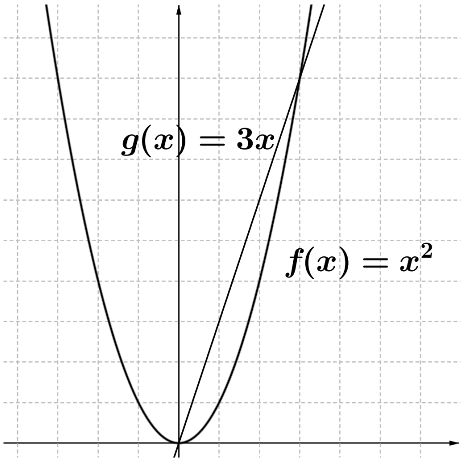
Esimerkki 6.13. Funktion $f(x) = x^2$ kuvaajan positiivinen osa ja suora $g(x) = 3x$ pyörähtävät y-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

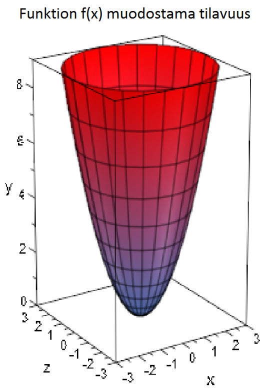
Ratkaisu: Nythän $y = x^2$, joten $x = \pm\sqrt{y}$, josta riittää valita positiivinen osa tarkastelun kohteeksi, eli $x = \sqrt{y}$. Lisäksi yhtälöstä $y = 3x$ saadaan $x = \frac{1}{3}y$.

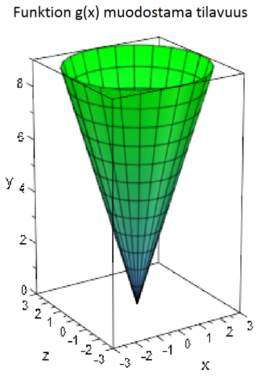
Määritetään integroimisrajat funktioiden kuvaajien leikkauspisteiden avulla. Jos $\sqrt{y} = \frac{1}{3}y$, niin $y = \frac{1}{9}y^2$ ja edelleen $y\Big(\frac{1}{9}y - 1\Big) = 0$. Näin ollen $y = 0$ tai $y = 9$.

Lasketaan kysytty tilavuus V siten, että lasketaan ensin funktion $x = \sqrt{y}$ kuvaajan muodostama tilavuus ja vähennetään siitä sitten suoran $x = \frac{1}{3}y$ muodostama tilavuus.

$$V = \int_{0}^{9} \pi\Big(\sqrt{y}\Big)^2 dy - \int_{0}^{9} \pi \left(\frac{1}{3}y\right)^2 dy \qquad \Big| \text{ summan integrointi}$$







$$= \int_0^9 \pi \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}y\right)^2 \right] dy \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= \pi \int_0^9 \left[y - \frac{1}{9}y^2 \right] dy \qquad \Big|\ \text{summan integrointi}$$

$$= \pi \Big/_0^9 \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{27}y^3 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} \cdot 9^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \left(\frac{1}{27} \cdot 9^3 - \frac{1}{27} \cdot 0^3 \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{81}{2} - \frac{729}{27} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{2187}{54} - \frac{1458}{54} \right]$$

$$= \underline{\frac{729\pi}{54} \text{ tilavuusyksikköä.}}$$

Huomaa, että edellisessä esimerkissä laskimme kahden funktion kuvaajan välisen tilavuuden samalla periaatteella, kuin olisimme laskeneet kahden funktion kuvaajan välisen pinta-alan, eli vähensimme pienemmän tilavuuden suuremmasta. Voimme siis kirjoittaa, että

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x)^2 - g(x)^2 \right] dx.$$

Jälleen on oltava tarkkana kummin päin vähennys tehdään, jotta päästään oikeaan lopputulokseen.

Otetaan vielä yksi lause esille. Jos meillä on kyseessä origon suhteen symmetrinen väli, eli esimerkiksi $[-a, a]$, on integroimista mahdollisuus hieman helpottaa, jos kyseessä on parillinen tai pariton funktio. Pariton funktio on kyseessä, jos vastaluvut antavat funktiolle vastalukuarvot, eli $f(x) = -f(-x)$. Parillinen funktio on puolestaan kyseessä silloin, kun vastaluvut antavat funktiolle saman arvon, eli $f(x) = f(-x)$. Esimerkiksi x^2 on parillinen ja x^3 pariton funktio.

Lause 6.4. Olkoon $a > 0$. Jos funktio f on parillinen, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

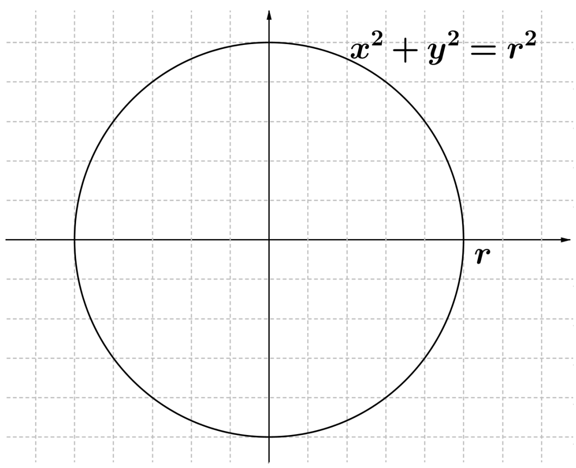
Jos funktio f on pariton, niin

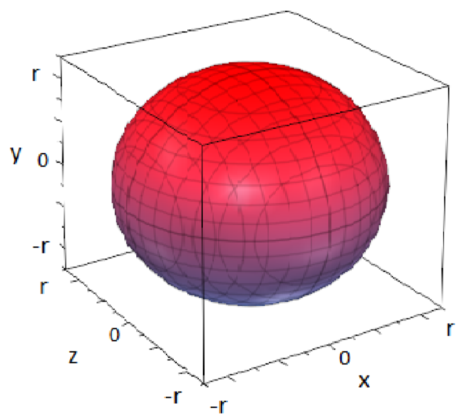
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Lauseen tulos pätee siis vain origon suhteen symmetriselle välille.

Esimerkki 6.14. [16, sivu 275]. Osoita, että r-säteisen pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.





Todistus. Origokeskisen r-säteisen ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$. Kun puoliympyrä pyörähtää kierroksen x-akselin ympäri, saadaan r-säteinen pallo. Siis

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 = r^2 - x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} \pi y(x)^2 \, dx && \Big| \text{ vakion siirto} \\
&= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx && \Big| \text{ parillisuus} \\
&= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2) \, dx \\
&= 2\pi \Big/_{0}^{r} \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \\
&= 2\pi \left[r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot r^3 - \left(r^2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \right] \\
&= 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) \\
&= \underline{\frac{4}{3} \pi r^3 \text{ tilavuusyksikköä.}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Huomaa, että yllä olevassa esimerkissä käytettiin hyväksi funktion parillisuutta.

6.5.2 Muita tilavuuksia

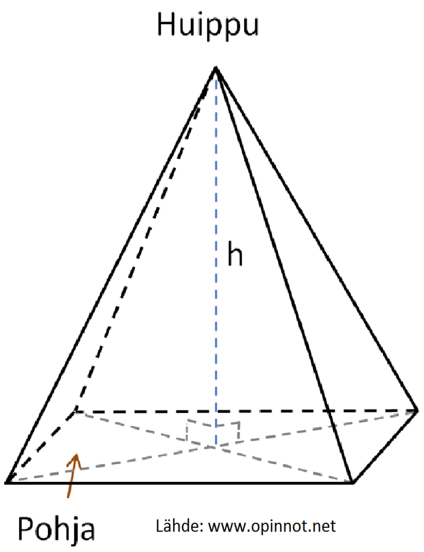
Jos joudumme määrittämään kappaleen tilavuuden, joka ei ole pyörähdyskappale, tulee meidän ensin määrittää pinta-alafunktio $A(x)$. Kun $A(x)$ on määritetty, voimme käyttää yhtälöä

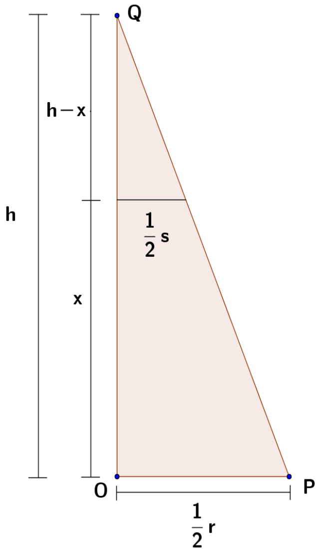
$$
V = \int_{a}^{b} A(x) \, dx
$$

tilavuuden ratkaisemiseksi.

Esimerkki 6.15. [24, sivu 334]. Olkoon pyramidin korkeus h ja pohjaneliön särmän pituus r. Johda pyramidin tilavuuden kaava.

Ratkaisu: Nyt jokainen poikkileikkauspinta-ala on neliön muotoinen. Olkoon pyramidin keskiakselina x-akseli, jolloin poikkileikkauspinnat ovat x-akselia kohtisuorassa. Asetetaan pyramidin pohjaneliön keskipiste origoon.





Nyt pohjaneliön särmän pituus s muuttuu x:n funktiona eli $s = s(x)$. Saamme symmetrian perusteella yhtälön

$$\frac{\frac{1}{2}s}{h-x} = \frac{\frac{1}{2}r}{h},$$

josta saamme särmän pituudelle funktion

$$s(x) = \frac{r}{h}(h-x).$$

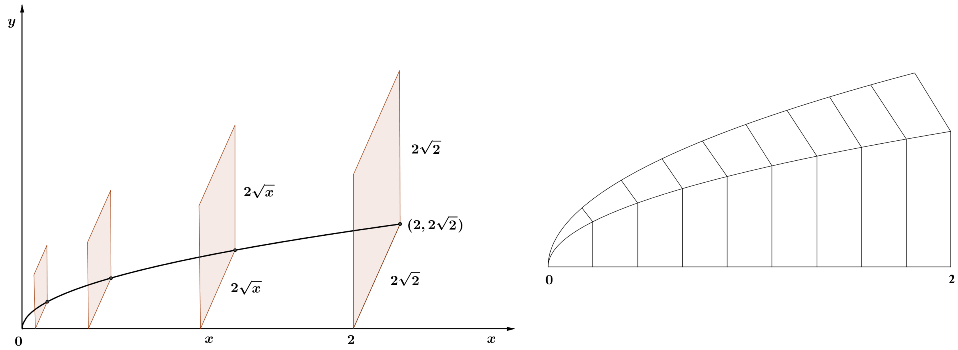
Tällöin pinta-alafunktio on

$$A(x) = s(x)^2 = \frac{r^2}{h^2}(h-x)^2.$$

Siis

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b A(x)\,dx \\
&= \frac{r^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2\,dx \\
&= \frac{r^2}{h^2} \Big/_0^h -\frac{(h-x)^3}{3} \\
&= \frac{r^2}{h^2}\left[-\frac{(h-h)^3}{3} - \Big(-\frac{(h-0)^3}{3}\Big)\right] \\
&= \underline{\frac{1}{3}r^2h.}
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.16. Olkoon meillä kappale, jonka x-akselia vastaan kohtisuora poikkileikkauspinta on neliö. Kappaleen pohjaa rajoittavat funktion $y = 2\sqrt{x}$ kuvaaja ja x-akseli. Ratkaise kyseisen kappaleen tilavuus välillä $[0, 2]$.



Ratkaisu: Nythän poikkileikkausneliön sivun pituus on $2\sqrt{x}$. Tällöin poikkileikkausneliön pinta-ala on $\left(2\sqrt{x}\right)^2 = 4x$. Siis

$$V = \int_a^b A(x)\ dx \quad = \quad \int_0^2 4x\ dx = 4 \Big/_0^2 \frac{1}{2}x^2 = 2\left(2^2 - 0^2\right) = \underline{8 \text{ tilavuusyksikköä}}.$$

6.6 Harjoitustehtäviä

1. Olkoon
$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 4 \quad \text{ja} \quad \int_{-2}^{1} g(x)\,dx = 5.$$
Laske
$$\text{a)} \int_{-2}^{1} 7f(x)\,dx, \qquad \text{b)} \int_{-2}^{1} \Big(6g(x) - 5f(x)\Big)\,dx.$$

2. Laske määrätty integraali
$$\int_{4}^{5} (5x+3)\,dx - \int_{3}^{5} (5x+3)\,dx + \int_{3}^{4} (5x+3)\,dx.$$

3. Laske suoran $y = -3x + 1$ ja koordinaattiakselien rajoittama pinta-ala.

4. Laske funktion $f(x) = -x^2 + 4$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.

5. Tasoaluetta rajoittavat suorat $x = -1$, $x = 1$ sekä x-akseli ja funktion $y = -3x^2 + a$ kuvaaja. Tasokuvion pinta-ala on 14. Määritä vakio a.

6. Laske funktion $f(x) = \sin x$ kuvaajan ja x-akselin rajoittama pinta-ala välillä $[0, 2\pi]$.

7. Laske funktion $f(x) = 2x^3 - 2x$ kuvaajan ja x-akselin rajoittama pinta-ala.

8. Laske funktioiden $f(x) = -x^2+x+5$ ja $g(x) = x+2$ kuvaajien rajoittaman alueen pinta-ala.

9. Laske funktion $y = x^3$ kuvaajan ja suoran $y = 4x$ rajoittaman alueen pinta-ala.

10. Funktion $y^2 = x(x-4)^2$ kuvaaja muodostaa silmukan. Laske syntyneen silmukan pinta-ala.

11. Laske funktioiden $x = 2\Big(y^2 - 1\Big)$ ja $x = 2\Big(-y^2 + 3y - 1\Big)$ kuvaajien rajoittaman alueen pinta-ala.

12. Määritä funktion $y = 3\sqrt{x}$ kuvaajan, suoran $y = 6$ ja y-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

13. Suora $y = \frac{3}{2}$, $0 \leq x \leq 10$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen ympyrälieriön tilavuus.

14. Suora $y = 4x - 2$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus välillä $[1, 2]$.

15. Funktion $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ kuvaaja ja suora $y = 4$ pyörähtävät y-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

16. Funktioiden $y = -x^2+6$ ja $y = 2$ kuvaajien välinen alue pyörähtää suoran $y = 2$ ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

17. Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy funktion $y = x^3 + 1$ kuvaajan, x-akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri. [s01.12]. (Vinkki: Tee koordinaatistomuunnos).

18. Lasista valmistettu maljakko on muodoltaan pyörähdyskappale, joka syntyy suorien $y = 4$ ja $y = -4$, paraabelin $x = 1 + y^2$ sekä y-akselin rajoittaman alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri. Maljakon pohjan halkaisija on $8,0$ cm. Kuinka paljon maljakko painaa, kun lasin tiheys on 3600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. [k94.8].

19. Johda kartion tilavuuden lauseke $V = \frac{1}{3}A_p h$, missä A_p on kartion pohjan pinta-ala ja h on kartion korkeus.

6.7 Harjoitustehtävien ratkaisut

1. a) 28, b) 10.
2. 0.
3. $\frac{1}{6}$ pinta-alayksikköä.
4. $10\frac{2}{3}$ pinta-alayksikköä.
5. $a = 8$.
6. 4 pinta-alayksikköä.
7. 1 pinta-alayksikköä.
8. $6\frac{2}{3}$ pinta-alayksikköä.
9. 8 pinta-alayksikköä.
10. $17\frac{1}{15}$ pinta-alayksikköä.
11. $2\frac{1}{4}$ pinta-alayksikköä.
12. 8 pinta-alayksikköä.
13. $\frac{45\pi}{2}$ tilavuusyksikköä.
14. $\frac{52\pi}{3}$ tilavuusyksikköä.
15. $\frac{9\pi}{4}$ tilavuusyksikköä.
16. $\frac{384\pi}{5}$ tilavuusyksikköä.
17. $\frac{333\pi}{10}$ tilavuusyksikköä.
18. $1,63$ kg.
19.

7 Integraalilaskennan sovelluksia

Integraalilaskentaa sovelletaan monilla aloilla, joita ovat muun muassa lääketiede, tilastotiede, fysiikka ja monet muut tekniikan alat. Tässä luvussa on tarkoitus tuoda integraalilaskentaa hieman käytännönläheisemmäksi esittelemällä muutamien esimerkkien avulla, kuinka sitä voidaan soveltaa muilla aloilla. Periaatteena on se, että jokaisen esimerkin alkaessa on todettu mihin alaan esimerkki liittyy.

Tämän luvun esimerkit ovat melko vaativia ja monet niistä ylittävät selvästi tämän kurssin vaatimustason. Niissä on myös monesti käytetty tietoja, jotka eivät välttämättä ole itsestään selviä ellei kyseisen esimerkin alaan ole perehtynyt tarkemmin. Esimerkkien tarkoitus onkin antaa aiheesta kiinnostuneille opiskelijoille lisämotivaatiota jatko-opintoja varten ja vastata kysymykseen "Mihin integraalilaskentaa oikein tarvitaan?".

Esimerkki 7.1. *Fysiikka (nopeus).* Kappaleen, joka liikkuu suoraan eteenpäin, nopeus on yhtälön

$$v = -\left(8.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) + \left(4.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2$$

mukainen. Laske paikan muutos ajanhetkestä $t = -2$ s ajanhetkeen $t = +4$ s.

Ratkaisu: Nopeus voidaan kirjoittaa muodossa $v = \frac{dx}{dt}$, joka tarkoittaa paikan muutosta ajan suhteen. Tällöin paikan muutos voidaan laskea yhtälöstä

$$\begin{aligned}
& v = \frac{dx}{dt} && \Big|\ \text{muuttujien separointi} \\
\Leftrightarrow\ & dx = v\ dt && \Big|\ \text{integrointi puolittain} \\
\Leftrightarrow\ & x = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt.
\end{aligned}$$

Paikan muutos on siis nopeuden yhtälön integraali t:n suhteen. Näin ollen

$$\begin{aligned}
x &= \int_{t_1}^{t_2} v\, dt \\
&= \int_{-2\mathrm{s}}^{4\mathrm{s}} \left(-\left(8.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) + \left(4.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2\right) dt && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \Big/_{-2\mathrm{s}}^{4\mathrm{s}} \left(-\left(8.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t + \frac{1}{3}\left(4.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^3\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(8.0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot 4\ \text{s} + \left(\frac{4.0}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^3}\right)\cdot (4\ \text{s})^3 \\
&\quad - \left[-\left(8.0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot(-2\ \text{s}) + \left(\frac{4.0}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^3}\right)\cdot(-2\ \text{s})^3\right] \\
&= -32.0\ \text{m} + \frac{256.0}{3}\ \text{m} - 16.0\ \text{m} + \frac{32.0}{3}\ \text{m} \\
&= -48.0\ \text{m} + \frac{288.0}{3}\ \text{m} \\
&= \frac{144.0}{3}\ \text{m} \\
&= \underline{48.0\ \text{m}}.
\end{aligned}
$$

Huomaa, että paikka x saadaan integroitaessa nopeuden v yhtälö ajan t suhteen. Toisaalta kiihtyvyys a saataisiin derivoitaessa nopeuden yhtälö ajan suhteen.

Esimerkki 7.2. *Biologia* [6]. Auringonpaisteen tehoa voidaan mitata erityisillä mittalaitteilla. Biologisti halusi mitata metsän kasvien auringosta saaman energiamäärän ja asensi mittalaitteen metsään. Mittalaitteen lukema noudatti yhtälöä $P(t) = -2,4t^2 + 82t - 300\ \left(\frac{\text{kJ}}{\text{h}}\right)$ aikavälillä $[8, 9]$. Kuinka paljon kasvit saivat energiaa auringosta kyseisellä aikavälillä?

Ratkaisu: Aikavälillä laitteen vastaanottama energia on energiavuon kertymä, joten se saadaan integroimalla. Näin ollen

$$
\begin{aligned}
E &= \int_8^9 -2,4t^2 + 82t - 300\, dx \\
&= \Big/_{8}^{9} -\frac{2,4}{3}t^3 + \frac{82}{2}t^2 - 300t \\
&= -0,8\cdot 9^3 + 41\cdot 9^2 - 300\cdot 9 - \left[-0,8\cdot 8^3 + 41\cdot 8^2 - 300\cdot 8\right] \\
&= -583,2 + 3321 - 2700 + 409,6 - 2624 + 2400 \\
&\approx \underline{220\ \text{kJ}.}
\end{aligned}
$$

Kasvit saivat siis noin 220 kJ energiaa auringosta kyseisellä aikavälillä.

Esimerkki 7.3. *Fysiikka (Työ)* [13]. Muuttomiehet työntävät laatikkoa massaltaan $m = 180$ kg pitkin lattiaa 10 m matkan. Valitettavasti liippaaja on tehnyt huonoa työtä ja lattia on ovea kohden mentäessä karheampi. Liukukitkakerrointa voidaan kuvata yhtälöllä

$$\mu_k = \mu_0 + ax^2,$$

missä x = paikkakoordinaatti (alussa $x_0 = 0$), $\mu_0 = 0,17$ (lepokitkakerroin) ja $a = 0,0062\ \frac{1}{\mathrm{m}^2}$ (kiihtyvyys). Kuinka suuren työn muuttomiehet tekevät siirtäessään laatikkoa 10 m matkan?

Ratkaisu: Pienimmillään työntävä voima on yhtä suuri kuin kitkavoima, joten

$$F = \mu_k N = mg\Big(\mu_0 + ax^2\Big),$$

missä N = tukivoima ja g = putoamiskiihtyvyys.

Työn yhtälö on $dW = F\,dx$, joten

$$\int dW = \int_{x_0}^{x} F\,dx = \int_{x_0}^{x} mg\Big(\mu_0 + ax^2\Big)\,dx$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
W &= mg\mu_0 \int_{x_0}^{x} 1\,dx + mga \int_{x_0}^{x} x^2\,dx \\
&= mg\mu_0 \Big/_{x_0}^{x} x + mga \Big/_{x_0}^{x} \frac{1}{3}x^3 \\
&= mg\left(\mu_0(x - x_0) + \frac{1}{3}a(x - x_0)\right) \\
&= 180\ \mathrm{kg} \cdot 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(0,17 \cdot 10\ \mathrm{m} + \frac{1}{3} \cdot 0,0062\ \frac{1}{\mathrm{m}^2} \cdot (10\ \mathrm{m})^3\right) \\
&= 6651\ \mathrm{Nm} \\
&\approx \underline{6,7\ \mathrm{kJ}}.
\end{aligned}$$

Yllä olevasta esimerkistä huomataan, että jos työntävä voima ei pysy vakiona, tarvitsemme tehdyn työn määrittämiseksi integraalilaskentaa.

Esimerkki 7.4. *Painopiste.* Laske painopiste alueelle, jota rajoittavat suora $y = 4$ ja paraabeli $y = x^2$.

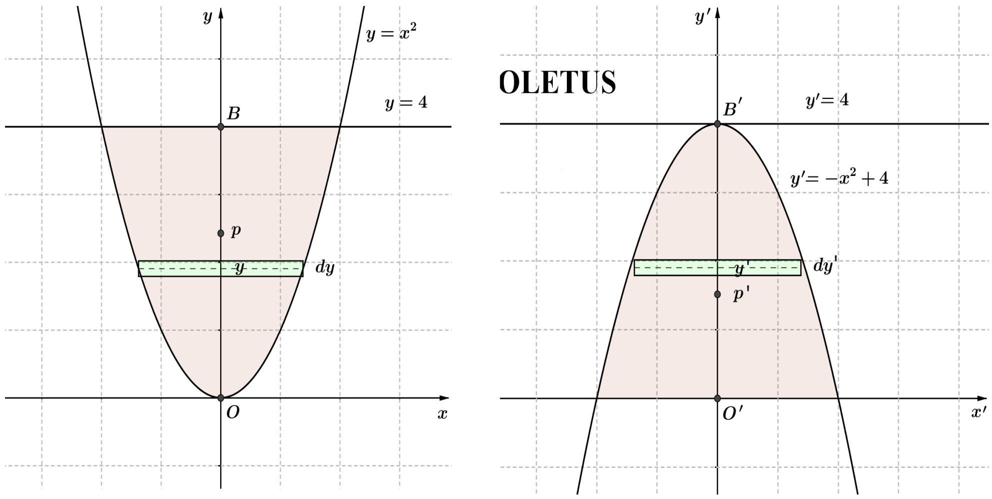
Ratkaisu: Syntyvä kuvio on symmetrinen y-akselin suhteen, joten painopiste sijaitsee janalla OB eli pisteessä $p = (0, y_p)$. Nyt tulee vielä selvittää painopisteen y koordinaatti y_p.

Jaetaan alue x-akselin suuntaisiin dy:n korkuisiin alkioihin. Pinta-alkio on helpompi muodostaa tekemällä oletus, että tarkasteltava kuvio olisikin toisinpäin kuin alkueräinen (ks. kuva 7.1), (tehty oletus kompensoidaan tehtävän lopussa). Merkitään laskettavaa oletuskoordinaattia symbolilla y_p'. Nyt

$$y' = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - y'$$

$$\Leftrightarrow \; x = \pm\sqrt{4 - y'}.$$

Näin ollen pinta-alkioksi saadaan $dA' = 2\sqrt{4 - y'}\, dy'$, missä arvo 2 huomioi symmetrisyyden, termi $\sqrt{4 - y'}$ on leveys (etäisyys origosta positiiviseen suuntaan) ja dy' on alkion korkeus.



Kuva 7.1: Vasemmalla lähtötilanne ja oikealla oletustilanne.

Painopisteen paikka janalla $O'B'$ saadaan y':n arvojen painotettuna keskiarvona, kun kukin y':n arvo vastaa yhtä pinta-alkiota. Koordinaatti y_p' saadaan siis jakamalla tulojen $y'\, dA'$ summa kokonaispinta-alalla A, joka on yhtä kuin alkioiden summa dA'. Lasketaan ensin $y'\, dA'$:

$$\int_0^4 y'\, dA' = \int_0^4 y' \cdot 2\sqrt{4 - y'}\, dy' \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$= 2\int_0^4 y' \cdot \sqrt{4 - y'}\, dy' \qquad \Big|\ \text{osittaisintegrointi}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[\Big/_{0}^{4} -\frac{2}{3}\left(4-y'\right)^{\frac{3}{2}} y' - \int_{0}^{4} -\frac{2}{3}\left(4-y'\right)^{\frac{3}{2}}\, dy'\right] \quad \Big|\ \text{vakion siirto} \\
&= \frac{4}{3}\left[\Big/_{0}^{4} -\left(4-y'\right)^{\frac{3}{2}} y' + \int_{0}^{4} \left(4-y'\right)^{\frac{3}{2}}\, dy'\right] \\
&= \frac{4}{3}\left[\Big/_{0}^{4} -\left(4-y'\right)^{\frac{3}{2}} y' + \Big/_{0}^{4} -\frac{2}{5}\left(4-y'\right)^{\frac{5}{2}}\right] \\
&= \frac{4}{3}\left[\Big/_{0}^{4} -\left(4-y'\right)^{\frac{3}{2}} y' - \Big/_{0}^{4} \frac{2}{5}\left(4-y'\right)^{\frac{5}{2}}\right] \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}}\right] \\
&= \frac{256}{15}.
\end{aligned}
$$

Lasketaan sitten kuvion pinta-ala A, joka voidaan laskea lähtötilanteen perusteella (ks. kuvan 7.1 vasemmanpuoleinen kuvio):

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} 4\, dx - \int_{-2}^{2} x^2\, dx \\
&= \Big/_{-2}^{2} 4x - \Big/_{-2}^{2} \frac{1}{3}x^3 \\
&= 8 + 8 - \left[\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right] \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

Nyt saamme määritettyä y_p':n:

$$
y_p' = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{256}{32 \cdot 5} = \frac{8}{5}.
$$

Koska alussa muodostimme pinta-alkion oletuksen perusteella, saadaan painopisteen y_p paikka lausekkeesta $4 - y_p'$ eli $y_p = \frac{12}{5}$. Muodostuvan kappaleen painopiste sijaitsee siis koordinaatissa $\underline{(0, \frac{12}{5})}$.

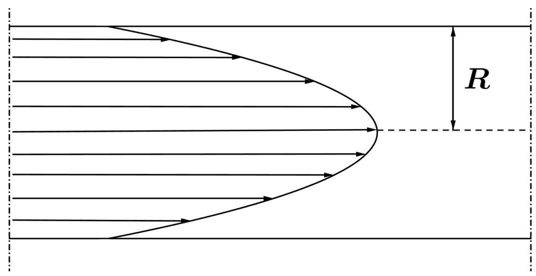
Esimerkki 7.5. *Talotekniikka* [13, 19]. Vesi virtaa putken läpi, jonka pituus on $1,0$ m ja halkaisija on $3,5$ mm. Paine-ero putken päiden välillä on $0,005$ kertaa normaali ilmanpaine. Oletetaan, että virtaus on laminaarista ja veden viskositeetti on $1,00 \cdot 10^{-3}$ Pa·s. Määritä veden virtausnopeus putken keskiakselilla, kun virtausnopeudelle voidaan käyttää yhtälöä

$$dv = -\frac{r}{2\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)dr,$$

missä v on nopeus, r on sisäosan säde, η on veden viskositeetti, p on paine ja l on putken pituus.

Laminaarisella virtauksella tarkoitetaan sitä, että virtauksen kerrokset eivät sekoitu keskenään eli virtaus ei ole turbulenttista (ks. kuva 7.2).

Ratkaisu: Viskositeetin takia virtauksella on nopeusprofiili siten, että putken pinnalla nopeus on nolla ja keskellä se on suurimmillaan. Tämän vuoksi nopeuden ratkaisemiseksi keskiakselilla, jossa $r_1 = 0$, tulee nopeuden yhtälö integroida putken säteen suhteen.



Kuva 7.2: Laminaarisen virtauksen virtausprofiili.

Integroidaan annettu virtausnopeuden yhtälö puolittain (R on putken kokonaissäde):

$$dv = -\frac{r}{2\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)dr \Leftrightarrow \int_0^v 1\ dv = \int_R^{r_1} -\frac{r}{2\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)\ dr \qquad \Big|\ \text{vakion siirto}$$

$$\Leftrightarrow v = -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)\int_R^{r_1} r\ dr$$

$$\Leftrightarrow v = -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)\Big/_{R}^{r_1}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow v = -\frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)\left(r_1^2 - R^2\right)$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)\left(R^2 - r_1^2\right).$$

Nyt saimme johdettua virtausnopeudelle yhtälön

$$v = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)\left(R^2 - r_1^2\right),$$

jonka avulla saamme tehtävän ratkaistua.

Tehtävänä oli määrittää virtausnopeus putken keskiakselilla, jolloin $r_1 \to 0$. Voimme siis kirjoittaa

$$v = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)\left(R^2 - r_1^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)R^2.$$

Sijoitetaan annetut lukuarvot yhtälöön:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dl}\right)R^2 \\ &= \frac{1}{4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s}}\left(\frac{0,005 \cdot 101,3 \cdot 10^3\ \text{Pa}}{1,0\ \text{m}}\right)(0,00175\ \text{m})^2 \\ &\approx \underline{0,39\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}. \end{aligned}$$

Veden virtausnopeus putken keskiakselilla on siis noin $0,39\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Esimerkki 7.6. *Lääketiede* [13, 25]. Ateroskleroosia sairastavan henkilön sepelvaltimon halkaisija on pienentynyt 30 %. Kuinka moninkertaiseksi paine sydämessä kasvaa, jos oletamme paineen sepelvaltimosuonen päässä sekä pulssin ja iskutilavuuden olevan samat kuin terveellä ihmisellä? Sepelvaltimon virtausta voidaan karkeasti arvioida Poiseuillen yhtälön

$$q_V = \frac{\pi \triangle p R^4}{8\eta L}$$

avulla. Johda ensin tämä yhtälö ja ratkaise sitten tehtävä. Veren viskositeetille voit käyttää arvoa $\eta = 1,2 \cdot 10^{-3}\text{Pa} \cdot \text{s}$.

Ratkaisu: Esimerkin 7.5 perusteella tiedetään, että laminaarisen virtauksen virtausnopeus putkessa on

$$v = \frac{\triangle p}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right),$$

missä $\triangle p$ on paine-ero, L on putken pituus, R on putken säde ja r on säde putken keskipisteestä tarkasteltavan kerroksen reunaan.

Tarkastellaan nyt fluidikerrosta välillä $[r, r + \triangle r]$. Ajassa $\triangle t$ fluidi etenee matkan $v\triangle t$. Näin ollen tilavuus, joka kulkee renkaan $[r, r + \triangle r]$ läpi ajassa $\triangle t$

on $2\pi r\triangle rv\triangle t$. Yhdessä aikayksikössä tämä tilavuus on $2\pi r\triangle rv$. Nyt voimme määrittää putken läpi kulkevalle tilavuusvirralle yhtälön:

$$
\begin{aligned}
q_V &= \int_0^R 2\pi rv\,dr && \Big|\ \text{vakion siirto ja } v\text{:n sijoitus} \\
&= 2\pi \int_0^R r\frac{\triangle p}{4\eta L}\Big(R^2 - r^2\Big)\,dr && \Big|\ \text{vakion siirto} \\
&= \frac{\pi\triangle p}{2\eta L}\int_0^R r\Big(R^2 - r^2\Big)\,dr && \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \frac{\pi\triangle p}{2\eta L}\left[\Big/_0^R \frac{1}{2}r^2R^2 - \Big/_0^R \frac{1}{4}r^4\right] \\
&= \frac{\pi\triangle p}{2\eta L}\left[\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4\right] \\
&= \frac{\pi\triangle p}{2\eta L}\cdot\frac{1}{4}R^4 \\
&= \frac{\pi\triangle pR^4}{8\eta L}.
\end{aligned}
$$

Nyt olemme siis johtaneet Poiseuillen yhtälön

$$q_V = \frac{\pi\triangle pR^4}{8\eta L},$$

jota voimme käyttää hyväksi tehtävän ratkaisussa.

Koska sepelvaltimon halkaisija on pienentynyt 30 %, myös säde on pienentynyt 30 %. Merkitään ateroskleroosia sairastavan ihmisen sepelvaltimon sädettä R_s ja terveen ihmisen R_t. Näin ollen $R_s = 0,70R_t$. Ratkaistaan paine-ero Poiseuillen yhtälöstä:

$$q_V = \frac{\pi\triangle pR^4}{8\eta L} \;\Leftrightarrow\; \triangle p = \frac{8\eta Lq_V}{\pi R^4}.$$

Pituus, tilavuusvirta ja viskositeetti ovat samat sairaalla ja terveellä ihmisellä. Sairaan ja terveen ihmisen paine-erojen suhde on

$$\frac{p_s}{p_t} = \frac{\frac{8\eta Lq_V}{\pi(0{,}70R)^4}}{\frac{8\eta Lq_V}{\pi R^4}} = \frac{1}{0,70^4} = 4,16 \approx 4,2.$$

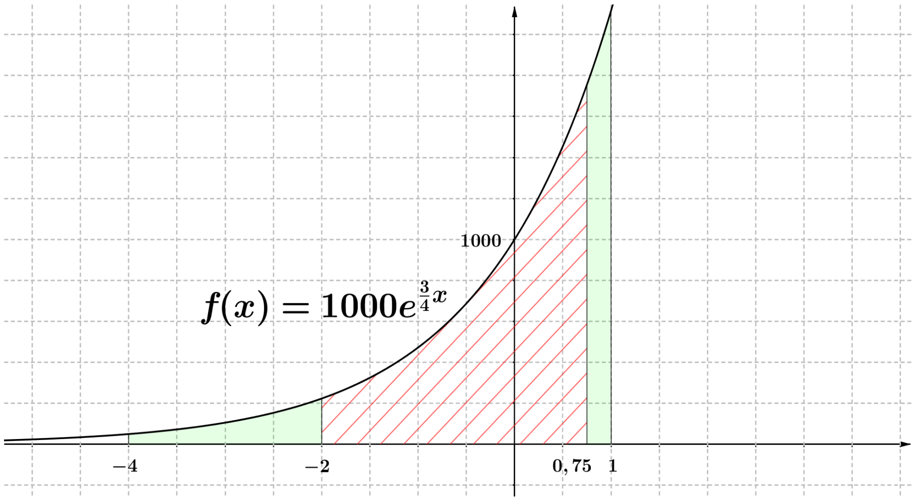
Terveellä ja sairaalla ihmisellä verenpaine sepelvaltimon päässä on sama. Näin ollen paine-erojen suhde on sama kuin sydämen pään paineiden suhde. Siis sairaan ihmisen sydämessä on noin 4,2-kertainen paine.

Esimerkki 7.7. *Todennäköisyyslaskenta.* Tiheysfunktio

$$f(x) = 1000e^{\frac{3}{4}x}, -4 \geq x \geq 1,$$

kuvaa jäätelöpaketin painon poikkeamaa ohjearvosta 1000 g. Jäätelöpaketti hyväksytään myyntiin, jos poikkeama on välillä $\left[-2, \frac{3}{4}\right]$. Laske todennäköisyys p sille, että jäätelöpaketti hyväksytään myyntiin.

Ratkaisu: Lasketaan ensin integraali yli koko tarkasteltavan alueen:



$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{1} 1000e^{\frac{3}{4}x}\,dx &= 1000\int_{-4}^{1} e^{\frac{3}{4}x}\,dx \\
&= 1000 \Big/_{-4}^{1} e^{\frac{3}{4}x} \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{4000}{3}\left(e^{\frac{3}{4}\cdot 1} - e^{\frac{3}{4}\cdot(-4)}\right) \\
&= \frac{4000}{3}\left(e^{\frac{3}{4}} - e^{-3}\right) \\
&\approx 2756,28.
\end{aligned}$$

Lasketaan sitten integraali yli hyväksytyn alueen:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{\frac{3}{4}} 1000 e^{\frac{3}{4}x}\, dx &= 1000 \int_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{\frac{3}{4}x}\, dx \\
&= 1000 \Big/_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{\frac{3}{4}x} \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{4000}{3}\Big(e^{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}} - e^{\frac{3}{4}\cdot(-2)}\Big) \\
&\approx 2042,57.
\end{aligned}
$$

Todennäköisyys sille, että jäätelöpaketti hyväksytään myyntiin on laskettujen integraalien osamäärä. Siis

$$
p = \frac{2042,57}{2756,28} \approx \underline{0,74}.
$$

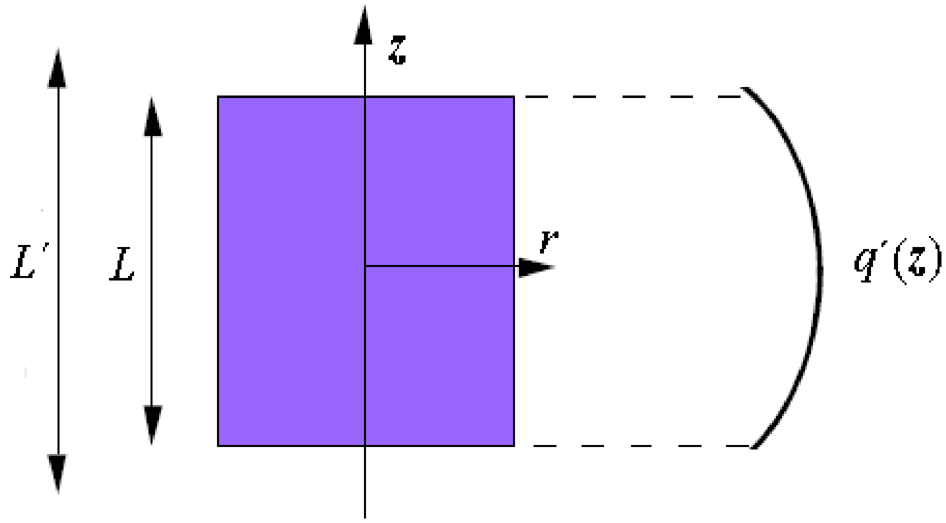
Esimerkki 7.8. *Ydinvoimatekniikka.* Käsitellään tässä painevesireaktoria. Painevesireaktorin (PWR) sydän koostuu pääasiassa polttoainesauvoista ja jäähdytteestä (vesi).Tehtävämme on määrittää jäähdytteen lämpötilan yhtälö virtauskanavassa. Jäähdytteen lämpötilan avulla pystymme selvittämään lämpötilan myös polttoainesauvan suojakuoressa ja polttoaineen sisällä. Näiden lämpötilojen määrittäminen on tärkeää, koska jos reaktorin lämpötila nousee liikaa, johtaa se polttoaineen sulamiseen ja sitä kautta vakavaan ydinvoimalaonnettomuuteen. Seuraavassa on esitetty yhtälö, jonka avulla jäähdytteen lämpötila virtauskanavassa voidaan määrittää:

$$
q_m c_p\Big(T_m(z) - T_{in}\Big) = \int_{-\frac{L}{2}}^{z_1} q'(z)\, dz = q'_{max} \int_{-\frac{L}{2}}^{z_1} cos\left(\frac{\pi z}{L'}\right) dz,
$$

missä q_m on jäähdytteen massavirta, c_p on ominaislämpökapasiteetti, $T_m(z)$ on jäähdytteen lämpötila korkeudella z_1, T_{in} on jäähdytteen sisäänmenolämpötila, L on polttoainesauvan pituus, L' on pituus jolloin neutronivuo poikkeaa nollasta ja q' on lineaariteho (ks. kuva 7.3).

Integroidaan yllä oleva lauseke:

$$
\begin{aligned}
&q_m c_p\Big(T_m(z_1) - T_{in}\Big) = q'_{max} \int_{-\frac{L}{2}}^{z_1} \cos\left(\frac{\pi z}{L'}\right) dz \\
\Leftrightarrow\ &q_m c_p\Big(T_m(z_1) - T_{in}\Big) = q'_{max} \Big/_{-\frac{L}{2}}^{z_1} \frac{L'}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{L'}\right) dz
\end{aligned}
$$



Kuva 7.3: Lineaaritehon riippuvuus korkeudesta z [11, sivu 166].

$$\Leftrightarrow q_m c_p\Big(T_m(z_1) - T_{in}\Big) = q'_{max}\frac{L'}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi z_1}{L'}\right) - \sin\left(\frac{\pi\left(-\frac{L}{2}\right)}{L'}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow T_m(z_1) - T_{in} = \frac{q'_{max}}{q_m c_p}\frac{L'}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi z_1}{L'}\right) + \sin\left(\frac{\pi L}{2L'}\right)\right].$$

Siirretään T_{in} vielä yhtälön toiselle puolelle, jolloin saamme yhtälön jäähdytteen lämpötilalle korkeuden z_1 funktiona.

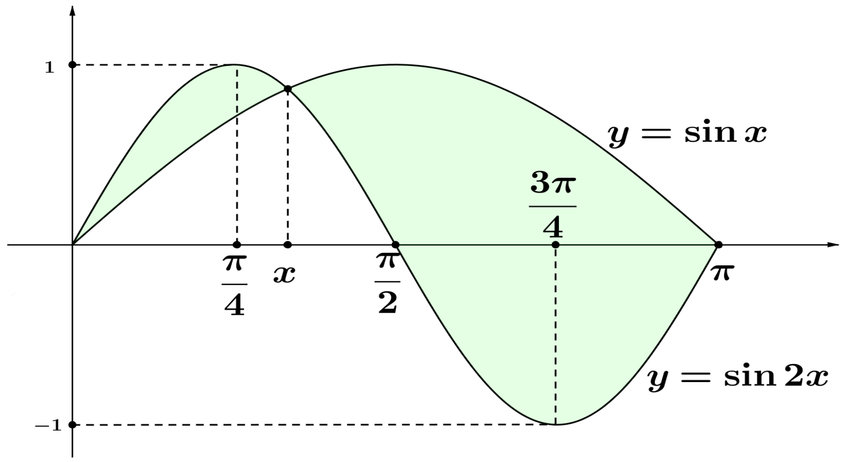
$$T_m(z_1) = \frac{q'_{max}}{q_m c_p}\frac{L'}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi z_1}{L'}\right) + \sin\left(\frac{\pi L}{2L'}\right)\right] + T_{in}.$$

Yllä olevan yhtälön avulla voimme määrittää virtuskanavan lämpötilan halutulla korkeudella z_1. Muut yhtälön muuttujat ovat usein tunnettuja tai helposti mitattavissa olevia suureita.

Integraalilaskentaa tarvitaan ydinvoimatekniikassa hyvin paljon. Yllä esitettiin vain yksi esimerkki monista integraalilaskennan käyttökohteista ydinvoimatekniikan puolella.

Esimerkki 7.9. *Talous/maantiede.* [k98.8]. Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää funktioiden $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ kuvaajien väliin, kun $x \in [0, \pi]$. Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkö on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 2 000 $\frac{\text{e}}{\text{ha}}$. Kuinka paljon metsän omistaja saa korvausta?

Ratkaisu: Määritetään ensin integroimisrajat funktioiden $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ kuvaajien leikkauspisteiden avulla käyttämällä hyväksi sinin kaksinkertaisen kulman kaavaa $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.



Nyt saamme siis yhtälön

$$
\begin{aligned}
\sin 2x = \sin x &\Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \sin x \\
&\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ tai } 2\cos x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ tai} \cos x = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = n\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{3} + n2\pi,\ n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Leikkauspisteet välillä $[0, \pi]$ ovat siis $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$ ja $x = \pi$.

Lasketaan kysytty pinta-ala jakamalla tarkastelu osiin:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\,dx \qquad \Big|\ \text{summan integrointi} \\
&= \Big/_{\!\!0}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right) + \Big/_{\!\!\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) \\
&= -\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0\right) + \\
&\quad \left(-\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 2\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 1\right) +$$

$$(-(-1)) + \frac{1}{2} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \underline{2\frac{1}{2}}.$$

Siis tuhoalueen pinta-ala on 2,5 neliökilometriä eli 250 hehtaaria. Tällöin metsänomistaja saa korvausta

$$250 \text{ ha} \cdot 2\ 000\ \frac{\text{e}}{\text{ha}} = \underline{500\ 000\ \text{e}}.$$

Esimerkki 7.10. *Sähkötekniikka.* Ratkaise sinimuotoisen vaihtojännitteen tehollisarvo yhtälöstä

$$V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2\, dt,$$

missä $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, V on vaihtojännitteen tehollisarvo ja V_0 on maksimiarvo, T on jaksonaika, t on aika sekä ω on kulmanopeus. Laske sitten mikä on vaihtojännitteen maksimiarvo V_0 ja jaksonaika T Suomessa, kun vaihtovirran taajuus $f = 50$ Hz ja vaihtojännitteen tehollinen arvo $V = 230$ V.

Ratkaisu: Sijoitetaan ensin $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ annettuun yhtälöön ja integroidaan sitten yhtälö. Siis

$$\begin{aligned} V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2\, dt &\Leftrightarrow V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (V_0 \sin(\omega t))^2\, dt \\ &\Leftrightarrow V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_0^2 \sin^2(\omega t)\, dt \\ &\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt. \end{aligned}$$

Palautetaan nyt mieleen trigonometrian kaava $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ ja sijoitetaan se yhtälöön. Näin ollen

$$V^2 = \frac{V_0^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt \Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos(\omega t))\,dt$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2T}\left(\int_0^T 1\,dt - \int_0^T \cos(\omega t)\,dt\right)$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2T}\left(\Big/_0^T t - \Big/_0^T \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2T}\left(T - 0 - \left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega T) - \frac{1}{\omega}\sin(\omega\cdot 0)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2T}\left(T - \frac{1}{\omega}\sin(\omega T)\right)$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2T\omega}\sin(\omega T).$$

Fysiikasta muistamme kaavat $\omega = 2\pi f$ ja $T = \frac{1}{f}$, joten saamme

$$V^2 = \frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2T\omega}\sin(\omega T) \Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2\frac{1}{f}2\pi f}\sin\left(2\pi f\frac{1}{f}\right)$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{4\pi}\sin(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{V_0^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V = \frac{V_0}{\sqrt{2}}}.$$

Ratkaistaan nyt kysytyt suureet:

Edellä olevan yhtälön nojalla vaihtojännitteen maksimiarvo $V_0 = V\cdot\sqrt{2}$. Kun $V = 230$ V, $V_0 = 230\text{ V}\cdot\sqrt{2} = \underline{325\text{ V}}$.

Jaksonaika T puolestaan saadaan yhtälöstä $T = \frac{1}{f}$ eli kun $f = 50$ Hz, $T = \frac{1}{50\text{ Hz}} = \underline{0,02\text{ s}}$.

<u>*Vastaus:*</u> Vaihtojännitteen maksimiarvo on noin 325 volttia ja jaksonaika 0,02 sekuntia.

Lähteet

[1] Hautajärvi, T. Ottelin, J. & Wallin-Jaakkola, L. *Laudatur 10: Integraalilaskenta*. Helsinki: Otava, 2007.

[2] Helsingin yliopisto, *Määrätty integraali*, [*Viitattu: 3.8.2014*]. Saatavilla internetistä: http://www.math.helsinki.fi/kurssit/koulum/luku10.pdf.

[3] Hiltunen, E. Holmberg, P. Jyväsjärvi, E. Kaikkonen, M. Lindblom-Ylänne, S. Nienstedt, W. Wähälä, K. *Galenos: Johdanto lääketieteen opintoihin*. Neljäs painos. Helsinki: WSOY, 2010.

[4] Hollanti, C. Luentomoniste: *Analyysi 2*. Tampereen yliopisto, 2010.

[5] Hyvärinen, J. Luennot: *Ydinvoimatekniikan perusteet*. Lappeenrannan teknillinen yliopisto, 2014.

[6] Häsä, J. Kortesharju, J. Luentomoniste: *Y100 Kurssimateriaali*. [*Viitattu: 10.10.2014*]. Saatavilla internetistä: http://webusers.siba.fi/ jkortesh/-HY/Y100/materiaali.pdf.

[7] Internetix. *MAA10 - Integraalilaskenta*. [*Viitattu: 3.3.2014*]. Saatavilla internetistä: http://opinnot.internetix.fi/fi/muikku2materiaalit/lukio/maa/maa 10/index.

[8] Jyväskylän yliopisto, *Matematiikan propedeuttinen kurssi*, [*Viitattu: 3.3.2014*]. Saatavilla internetistä: http://www.math.jyu.fi/matyl/prope deuttinen/kirja/index-80.html.

[9] Jäppinen, P. Kupiainen, A. & Räsänen, M. *Calculus 5: Lukiomatematiikan kertaus*. Neljäs painos. Helsinki: Otava, 2002.

[10] Jäppinen, P. Kupiainen, A. & Räsänen, M. *Calculus 6: Analyysin jatkokurssi*. Neljäs painos. Helsinki: Otava, 2000.

[11] Kalli, H. Opetusmoniste: *Ydinreaktorien fysiikkaa, osa 1*. Lappeenrannan teknillinen yliopisto, 2013.

[12] Kivelä, S. K. Nurmiainen, R. *M niin kuin matematiikka: Lukiotason matematiikan tietosanakirja*. Versio 1.12. TKK 1998-2005. Saatavilla internetistä: http://matta.hut.fi/matta/isom/isom.pdf.

[13] Keskinen, J. Luennot: *Mekaniikka*. Tampereen teknillinen yliopisto, 2013.

[14] Koivisto, P. Luentomoniste ja luennot: *Analyysi 1*. Tampereen yliopisto, 2012.

[15] Koivisto, P. Luentomoniste ja luennot: *Analyysi 2*. Tampereen yliopisto, 2013.

[16] Kontkanen, P. Lehtonen, J. Luosto, K. Nurmi, J. Nurmiainen, R. & Savolainen, S. *Pyramidi 3: Matematiikan tietokirja*. Kolmas painos. Helsinki: Tammi, 2003.

[17] Lahtinen, A. & Myrberg, L. *Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen 1993-2002*. Kahdestoista painos. Helsinki: MFKA-Kustannus Oy, 2002.

[18] Launonen, E. Sorvali, E. & Toivonen, P. *Teknisten ammattien matematiikka 3D*. Viides painos. Helsinki: WSOY, 2003.

[19] Mansfield, M. & O'Sullivan, C. *Understanding Physics*. Second edition. John Wiley & Sons, 2011.

[20] Merikoski, J. Oinas-Kukkonen, H. Sankilampi, T. & Laurinolli, T. *Matematiikan taito 8: Integraalilaskenta*. Toinen painos. Porvoo: WSOY, 1996.

[21] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. [*Viitattu: 3.3.2014*]. Saatavilla internetistä: http://www.oph.fi/download /47345_lukion_opetussuunnitelman_peruste et_2003.pdf.

[22] Oulun yliopisto, *Määrätty integraali*, [*Viitattu: 28.8.2014*]. Saatavilla internetistä: http://math.oulu.fi/materiaalit/luentorungot/Analyysin_ker tausta/integrointi.pdf.

[23] Ristonmaa, J. *Integraalilaskennan esivaiheista nykyiseen lukioopetukseen*. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, 2013. Informaatiotieteiden yksikkö. [*Viitattu: 3.3.2014*]. Saatavilla Internetistä: http://tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/82285/gradu04835.pdf?seq uence=1.

[24] Salas, S.L. Hille ,E. & Etge, G.J. *Calculus: One and several variables*. Ninth edition. John Wiley & Sons, 2003.

[25] Valmennuskeskus. *Lääketiede (fysiikka): Teoria, tehtävät ja ratkaisut*. [*Viitattu: 8.10.2014*]. Saatavilla internetistä: www.valmennuskeskus.fi.

[26] Wikipedia, *Differentiaali- ja integraalilaskenta*, [*Viitattu: 4.1.2014*]. Saatavilla internetistä: http://fi.wikipedia.org/wiki/Differentiaali-_ja_inte graalilaskenta.

[27] Wikipedia, *Integraali*, [*Viitattu: 4.1.2014*]. Saatavilla internetistä: http://fi.wikipedia.org/wiki/Integraali.

[28] Wikipedia, *Integraalifunktio*, [*Viitattu: 4.1.2014*]. Saatavilla internetistä: http://fi.wikipedia.org/wiki/Integraalifunktio.